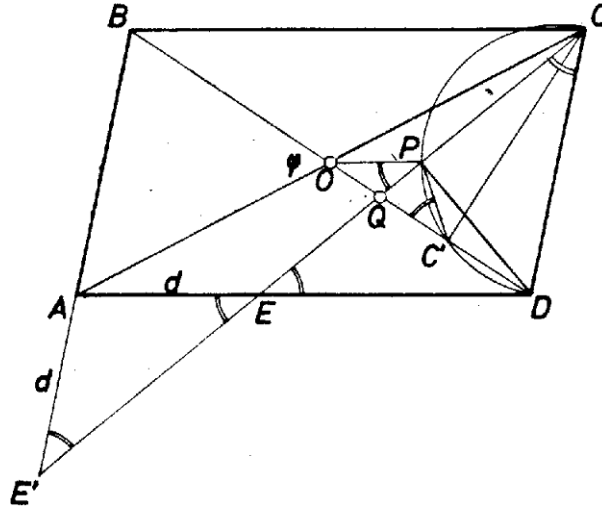


Válasszuk úgy a jelölést, hogy az  $ABCD$  paralelogrammában  $AD > DC$ , az átlók által bezárt szög  $\varphi$ ,  $AD - DC = d > 0$ , és legyen adva az  $AC$  átló. Jelöljük az átlók metszéspontját  $O$ -val.

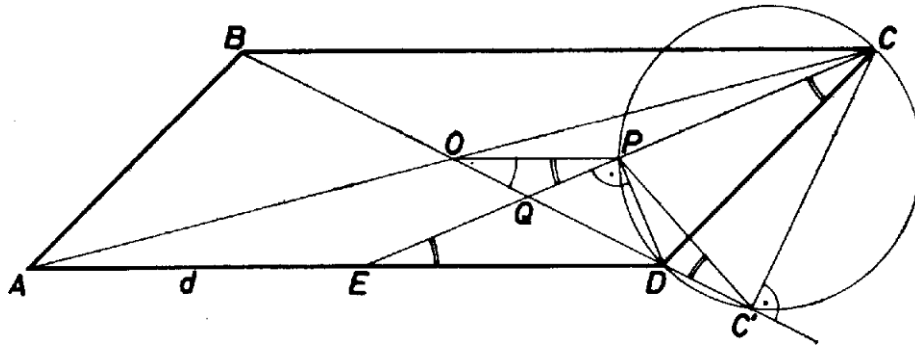


1. ábra

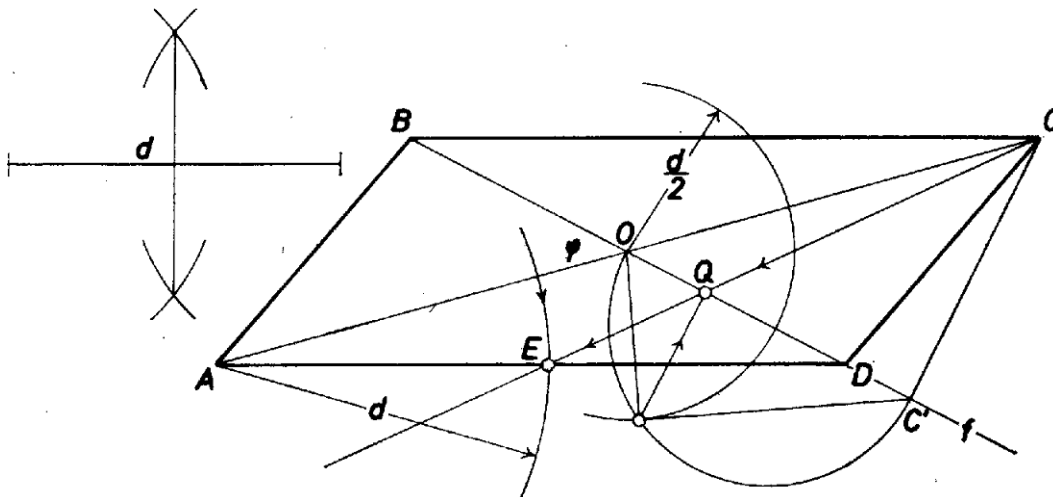
Mivel ismerjük az átlók hajlásszögét, meg tudjuk húzni a  $BD$  átló egyenesét is. Mérjük fel az  $AD$  oldalra a  $DE = DC$  távolságot. A  $C, E$  pontokon átmenő egyenes messe a  $BD$  átló egyenesét a  $Q$  pontban. A  $CDE$  egyenlő szárú háromszögben húzzuk meg a  $CE$  oldalhoz tartozó magasságot, és jelöljük a talppontját  $P$ -vel. Mivel  $P$  felezi  $EC$ -t és  $O$  felezi  $AC$ -t,  $OP \parallel AE$  és  $OP = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}d$ . Vetítsük a  $C$  pontot merőlegesen a  $BD$ -re, s jelöljük a vetületét  $C'$ -vel. A  $CDC'$  és  $CDP$  közös átfogójú derékszögű háromszögek,  $PCDC'$  tehát húrnegyszög. Ha  $C'$  a  $CD'$  ugyanazon oldalára esik, mint  $P$ , akkor  $PCD \sphericalangle + PC'D \sphericalangle = 180^\circ$  (1. ábra), s ezért  $PCD \sphericalangle = PC'O \sphericalangle$ . Ha  $P$  és  $C'$  a  $CD$  szakasz ellenkező oldalán van (2. ábra), akkor  $DCP \sphericalangle = DC'P \sphericalangle$  egyenlő húrhoz tartozó kerületi szögek. Továbbá  $DCP \sphericalangle = DEP \sphericalangle = EPO \sphericalangle$ . Mindkét esetben az  $OPC'$  és  $OPQ$  háromszögek hasonlóak (két szögük egyenlő), és így

$$(1) \quad OP^2 = OQ \cdot OC'.$$

Az  $OP$  és  $OC'$  szakaszok hosszát ismerjük, s így  $OQ$  távolságot meg tudjuk szerkeszteni.



2. ábra



### 3. ábra

Ennek alapján a szerkesztést a következőképpen végezhetjük el (3. ábra).

Felvesszük az  $AC$  szakaszt, az  $O$  felezőpontján át meghúzzuk a  $BD$  átló  $f$  egyenesét, mely vele az adott  $\varphi$  szöget zárja be. A  $C$  pontot levetítjük  $f$ -re és  $OC'$  és  $OP = \frac{1}{2}d$  ismeretében (1) felhasználásával megszerkesztjük az  $OQ$  távolságot. Majd  $A$  körül egy  $d$  sugarú kört rajzolunk. Ahol a kör metszi a  $CQ$  egyenest, ott kapjuk az  $E$ , ill.  $E'$  pontot. A körnek az egyenessel általában két metszéspontja lesz. Az ezeket  $A$ -val összekötő egyenesek metszik ki  $f$ -ből a paralelogramma hiányzó csúcsait, az 1. ábra szerinti  $AE'$  a  $B$  csúcsot, hiszen  $\angle ECD = \angle CED = \angle AEE' = \angle EE'A$  miatt  $E'A \parallel CD$ . A szerkesztés menetéből következik, hogy az  $ABCD$  paralelogramma eleget tesz a feltételnek.

A megoldhatóság feltétele, hogy az  $A$  körüli,  $d$  sugarú kör két különböző pontban messe az  $OQ$  egyenest. Nyilvánvaló továbbá, hogy a háromszög-egyenlőtlenség miatt az is szükséges, hogy  $d < AC$  legyen. Bővebb diszkussziót nem végezhetünk.

Tekintsük végül az adathármasnak azt a különleges, esetét, ha  $\varphi = 90^\circ$ . Ekkor  $C'$  az  $O$ -ba esik, szerkesztésünk nem hajtható végre, de az átlók merőlegességéből tüstént következik, hogy a paralelogramma csak rombusz lehetne. Így  $d = 0$  mellett a feladat határozatlan,  $d > 0$  mellett pedig az adathármas ellentmondó. ( $d = 0$ -ból indulva viszont az következik, hogy csak  $\varphi = 90^\circ$  lehet.)

A szerkesztés helyességét a következőképpen igazolhatjuk. Miután megszerkesztettük a  $CQ$  egyenest a fent leírt módon, s elmetszettük az  $A$  pont körüli  $d$  sugarú körrel, húzzunk párhuzamost az  $O$  ponton keresztül az  $AE$ -vel. A kapott  $P$  pont nyilván felezi az  $EC$  távolságot. A mértani közép tulajdonságából következik, hogy  $\angle OPQ = \angle PC'Q$ , valamint a párhuzamosság miatt  $\angle OPQ = \angle AEE'$ .  $P$ -ben állítsunk merőlegest  $EC$ -re, s messe ez az  $f$ -et  $D'$ -ben.  $\angle ECD'$  háromszög egyenlő szárú,  $\angle ECD' = \angle CED'$ , továbbá  $\angle CPC'D'$  négyszög húrnégyszög, s ezért  $\angle PCD' = \angle PC'Q$ . Messe az  $AE$  egyenes az  $f$  egyenest  $D$ -ben, az  $\angle AEE' = \angle CED$ . S mivel  $\angle CED'$  és  $\angle CED$  szögek nagysága megegyezik és egyik száruk közös, kell hogy a  $D$  egybeessen  $D'$ -vel. Az  $ABCD$  idom paralelogramma – hiszen  $AE' \parallel CD$ , s mivel  $O$  felezi  $AC$ -t, így kell hogy felezze  $BD$ -t is –, s eleget tesz az előírt feltételeknek.

Csordás András (Esztergom, Dobó K. Gimn.)