

I. megoldás. Jelöljük általában $R_n(x)$ -szel az

$$(2) \quad R_n(x) = x^{2n} - 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} - 4x^{2n-3} + \dots + 2n + 1$$

összeget. Megmutatjuk, hogy ez minden rögzített x mellett n -ben monoton nő. Ebből következik a feladat állítása, hiszen

$$R_1(x) = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 \geq 2,$$

tehát így (1) bal oldalának értéke minden valós x mellett legalább 2.

Állításunk igazolása érdekében vizsgáljuk meg a $Q_n(x) = R_n(x) - R_{n-1}(x)$ különbséget:

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= x^{2n} - 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} - 4x^{2n-3} + 5x^{2n-4} - 6x^{2n-5} + \dots + 2n + 1 - \\ &\quad - (x^{2n-2} - 2x^{2n-3} + 3x^{2n-4} - 4x^{2n-5} + \dots + 2n - 1) = \\ &= x^{2n} - 2x^{2n-1} + 2x^{2n-2} - 2x^{2n-3} + 2x^{2n-4} - 2x^{2n-5} + \dots + 2. \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy rögzített x mellett ez is monoton nő n -ben. Ebből már következik az állításunk, hiszen

$$Q_1(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 1.$$

Ismét a szomszédos tagok különbségét vizsgáljuk :

$$\begin{aligned} Q_n(x) - Q_{n-1}(x) &= x^{2n} - 2x^{2n-1} + 2x^{2n-2} - 2x^{2n-3} + \dots + \\ &\quad + 2 - (x^{2n-2} - 2x^{2n-3} + \dots + 2) = \\ &= x^{2n} - 2x^{2n-1} + x^{2n-2} = (x^n - x^{n-1})^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Állításainkat ezzel bebizonyítottuk.

Náray Zsófia (Budapest, I. István Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. Az egyenlő kitevőjű hatványok különbségének ismert szorzattá alakítása alapján, ha $x \neq -1$

$$S_k(x) = (-x)^k + (-x)^{k-1} + \dots + 1 = \frac{1 - (-x)^{k+1}}{1 + x}.$$

Ezt ismét felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} T_k(x) &= S_k(x) + S_{k-1}(x) + \dots + S_1(x) + 1 = \frac{1 - (-x)^{k+1}}{1 + x} + \\ &\quad + \frac{1 - (-x)^k}{1 + x} + \dots + \frac{1 - (-x)^2}{1 + x} + \frac{1 - (-x)}{1 + x} = \\ &= \frac{(k+1) - (-x)S_k(x)}{1 + x} = \frac{(k+1)(1+x) - (-x)(1 - (-x)^{k+1})}{(1+x)^2} = \\ &= \frac{(k+1) + (k+2)x + (-x)^{k+2}}{(1+x)^2}. \end{aligned}$$

Mivel az $(S_k(x) + S_{k-1}(x) + \dots + S_1(x) + 1)$ összegben $(-x)^k$ csak egyszer szerepel, $(-x)^{k-1}$ kétszer, $(-x)^{k-2}$ háromszor, és így tovább, végül az 1 minden tagban szerepel, tehát $(k+1)$ -szer fordul elő,

$$S_{2n}(x) = (-x)^{2n} + 2(-x)^{2n-1} + 3(-x)^{2n-2} + \dots + 2n + 1 = R_n(x).$$

Ez pedig nem negatív x mellett pozitív, hiszen páros k mellett az előbb kapott alak számlálója is, nevezője is pozitív. Tehát nem negatív x mellett (1) bal oldalán pozitív szám áll. Ámde negatív x mellett is pozitív ennek a kifejezésnek az értéke, hiszen ekkor az eredeti alak minden tagja pozitív. Tehát (1) bal oldalának az értéke minden valós x mellett pozitív.

Arató Miklós (Budapest, József A. Gimn., II. o. t.)