

Ha (1)-ben $\sqrt{2}$ helyére a -t írunk, a kapott

$$(2) \quad \begin{aligned} aX + 8,59Y &= 9,98 \\ 1,41X + 8,59Y &= 10 \end{aligned}$$

egyenletrendszer gyökei az

$$X = -\frac{0,02}{a-1,41}, \quad Y = \frac{10}{8,59} - \frac{1,41}{8,59}X$$

számok lesznek. Ebből $a = \sqrt{2}$ helyettesítéssel kapjuk (1) gyökeit, és a két egyenletrendszer gyökeinek eltérésére azt kapjuk, hogy

$$(3) \quad X - x = -\frac{0,02}{a-1,41} + \frac{0,02}{\sqrt{2}-1,41} = \frac{(a-\sqrt{2}) \cdot 0,02}{(a-1,41)(\sqrt{2}-1,41)},$$

$$(4) \quad Y - y = -\frac{1,41}{8,59}(X - x).$$

Mivel $1,414 < \sqrt{2} < 1,4143$, ha $1,414 < a < 1,4143$, akkor

$$10^3|a - \sqrt{2}| < \frac{0,02}{0,0043^2}|a - \sqrt{2}| < |X - x| < \frac{0,02}{0,004^2}|a - \sqrt{2}| < 2 \cdot 10^3|a - \sqrt{2}|.$$

Emiatt $|X - x| < 0,01$, ha $|a - \sqrt{2}| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$, vagyis a legalább 5 tizedesjegy pontossággal közelíti $\sqrt{2}$ értékét.

Mivel hat tizedesjegyre $\sqrt{2} = 1,414214$, kell is ez a pontosság, mert ha a csak négy tizedesre közelíti $\sqrt{2}$ -t, akkor $|a - \sqrt{2}| > 10^{-5}$, és $|X - x| > 10^{-2}$. Mivel a (4)-ben fellépő együttható kisebb 1-nél, $|X - x| < 10^{-2}$ már maga után vonja, hogy $|Y - y| < 10^{-2}$ is teljesül. Tehát ahhoz, hogy a kívánt pontosságot elérjük, $\sqrt{2}$ értékét legalább öt tizedesjegy pontossággal kell figyelembe vennünk.

Megjegyzés. Sokkal kisebb pontosság elegendő, ha előbb gyöktelenítjük x nevezőjét. Ekkor ugyanis

$$x = \frac{-0,02(\sqrt{2} + 1,41)}{2 - 1,41^2} = -1,68(\sqrt{2} + 1,41),$$

és a kívánt pontosságot akkor is megkapjuk, ha itt $\sqrt{2}$ értékét csak két tizedesjegy pontossággal vesszük figyelembe.