

Egyenletünk ekvivalens a

$$(2) \quad (\sqrt{2}y + z)(\sqrt{2}y - z) = 1$$

egyenlettel, ahol $z = 2x + 1$. Ha ennek y, z tetszőleges megoldása, és α, β a

$$(3) \quad (\sqrt{2}\alpha + \beta)(\beta - \sqrt{2}\alpha) = 1$$

egyenlet megoldása, akkor a két egyenletet összeszorozva azt kapjuk, hogy

$$(\sqrt{2}Y + Z)(\sqrt{2}Y - Z) = 1,$$

ahol $Y = \alpha z + \beta y$, $Z = 2\alpha y + \beta z$. A (2), (3) egyenletek tetszőleges természetes számokból álló megoldásából tehát a (2) egyenlet egy újabb természetes számokból álló megoldását kapjuk. (Az új megoldás azért tér el a régitől, mert benne $Y > y$, $Z > z$.) Emiatt elegendő (3) egyetlen megoldását megtalálni. Például az $\alpha = 2$, $\beta = 3$ értékek mellett az

$$\begin{aligned} y_0 &= 1, & y_{n+1} &= 3y_n + 2z_n, \\ z_0 &= 1, & z_{n+1} &= 4y_n + 3z_n \end{aligned}$$

sorozatot kapjuk. Mivel ennek elemei gyökei a (2) egyenletnek, vagyis $z_n^2 = 2y_n^2 - 1$, z_n páratlan, így az

$$x_n = \frac{z_n - 1}{2}$$

sorozat tagjai és egészek, és $n \geq 1$ mellett pozitívak is. Ezzel beláttuk, hogy az (1) egyenletnek valóban végtelen sok megoldása van a természetes számok halmazában.