

A középen álló különbség első tagját a és b kvadratikus közepének, a másodikat a és b mértani közepének nevezzük. Jelöljük őket Q -val és M -mel

$$Q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}, \quad M = \sqrt{ab}.$$

Ezek is pozitívak, és

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab = 2(Q^2 + M^2), \\ (a - b)^2 &= a^2 + b^2 - 2ab = 2(Q^2 - M^2).\end{aligned}$$

Az utóbbi összefüggés miatt két pozitív szám kvadratikus és mértani közepe csak akkor egyenlő, ha maguk a számok egyenlők, különben a kvadratikus közép a nagyobb közülük. Így $a = b$ esetén (1) minden tagja 0-val egyenlő. Megmutatjuk, hogy különben mindkét helyen az egyenlőtlenség jele érvényes.

Helyettesítsük a bizonyítandó egyenlőtlenségbe a Q , M mennyiségeket.

$$\frac{Q^2 - M^2}{\sqrt{2(Q^2 + M^2)}} < Q - M < 2 \frac{Q^2 - M^2}{\sqrt{2(Q^2 + M^2)}}.$$

Mivel most $Q > M$, ha minden tagot $(Q - M)$ -mel osztunk, majd $\sqrt{Q^2 + M^2}$ -nel szorzunk, az egyenlőtlenség iránya nem változik meg.

$$(2) \quad \frac{Q + M}{\sqrt{2}} < \sqrt{Q^2 + M^2} < (Q + M)\sqrt{2}.$$

Mivel Q és M pozitív, vehetjük e tagok négyzeteit is.

$$\frac{Q^2 + 2QM + M^2}{2} < Q^2 + M^2 < 2(Q^2 + M^2 + 2QM).$$

Az első két tag különbsége $\frac{1}{2}(Q - M)^2$, ami valóban pozitív. A második két tag különbsége még a kettes szorzó nélkül is a pozitív $2QM$. Ezzel a feladat állításánál többet mondó

$$\frac{(a - b)^2}{2(a + b)} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} - \sqrt{ab} \leq \frac{(a - b)}{\sqrt{2}(a + b)}$$

egyenlőtlenséget is beláttuk.

Megjegyzés. Ha (2) első egyenlőtlenségét $\sqrt{2}$ -vel osztjuk, a

$$\frac{Q + M}{2} < \sqrt{\frac{Q^2 + M^2}{2}}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Eszerint különböző pozitív számok számtani közepe kisebb a kvadratikus közepükénél. Belátható a bizonyítandó egyenlőtlenség csupán ennek felhasználásával is.