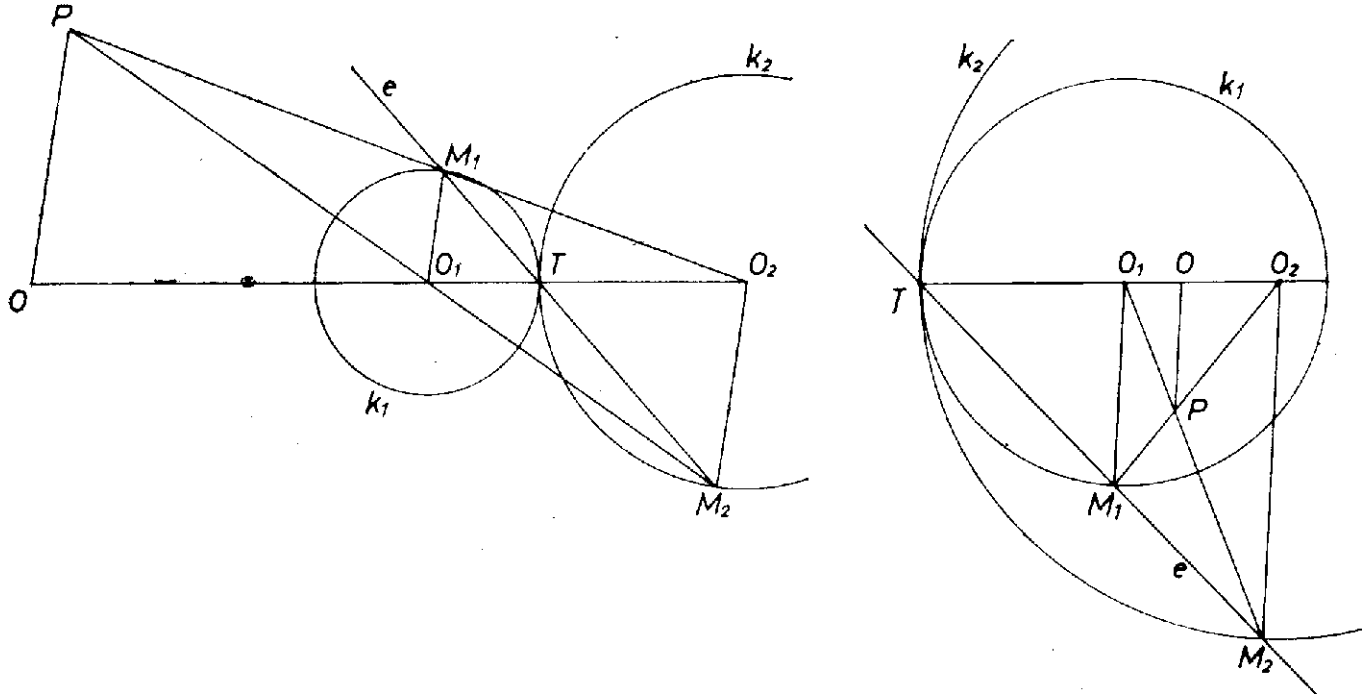


A feladatban a két kör szerepe azonos és sugaruk különböző, így feltehetjük, hogy például k_2 a nagyobb sugarú: $r_1 < r_2$.



Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor a körök kívülről érintik egymást. Ekkor M_1 és M_2 közrefogja T -t, és az O_1M_1 , O_2M_2 sugarak ellentétes irányúak. Ha M_1 és M_2 közül az egyik az O_1O_2 egyenesen van, ott van a másik is, és P nem jön létre. Különböznél az $O_1M_1O_2M_2$ négyszög olyan trapéz, amelynek O_1M_2 , M_1O_2 szárai nem párhuzamosak, hiszen a párhuzamos O_1M_1 , M_2O_2 oldalak nem egyenlők. Mivel e két oldal közül az első a kisebb, a szárak O_1M_1 -en túli meghosszabbításai metszik egymást, itt van a P pont. Jelöljük a P -n átmenő, O_1M_1 -gyel párhuzamos egyenes O_1O_2 -vel alkotott metszéspontját O -val, ez is O_1M_1 -nek O_2M_2 -vel átellenes oldalán van. Emiatt az $O_1O_2M_1$ és OO_2P háromszögek hasonlóak,

$$(1) \quad OP : O_1M_1 = OO_2 : O_1O_2 = O_2P : O_2M_1.$$

Ugyancsak hasonlóak a PM_1O_1 , PO_2M_2 háromszögek is, emiatt $PM_1 : PO_2 = r_1 : r_2$, tehát a fenti arányok közös értéke

$$(2) \quad O_2P : O_2M_1 = PO_2 : (PO_2 - PM_1) = r_2 : (r_2 - r_1).$$

Tehát egyrészt

$$OP = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1},$$

másképp

$$OO_2 = \frac{(r_1 + r_2)r_2}{r_2 - r_1}.$$

Ezek miatt O helyzete nem függ e megválasztásától, és ugyancsak független ettől P és O távolsága. Ez azt jelenti, hogy P rajta van az O középpontú, $r = r_1 r_2 / (r_2 - r_1)$ sugarú körön. Megfordítva, ha P ennek a körnek nem az O_1O_2 egyenesen levő, de különben tetszőleges pontja, akkor az OP -vel megegyező irányú k_1 -beli O_1M_1 és OP -vel ellentétes irányú k_2 -beli O_2M_2 sugarak végpontjai által meghatározott M_1 , M_2 pontra az $O_1O_2M_1$ és OO_2P , valamint a PM_1O_1 és PO_2M_2 háromszögek hasonlóak, hiszen két-két oldaluk párhuzamos, és ezek aránya egyenlő. Így M_1 a PO_2 és M_2 a PO_1 egyenesen vannak, és mivel O_1M_1 , O_2M_2 ellentétes irányúak, M_1M_2 átmegy T -n. Az O középpontú, r sugarú körnek tehát tetszőleges, nem az O_1O_2 egyeneshez tartozó pontja a vizsgált mértani helyhez tartozik.

Rátérünk annak az esetnek vizsgálatára, amikor k_1 belülről érinti k_2 -t (továbbra is feltesszük, hogy $r_1 < r_2$). Most O_1M_1 és O_2M_2 egyirányúak, emiatt P és az általa meghatározott O köztük van. Az $O_1O_2M_1$ és OO_2P háromszögek most is hasonlóak, tehát (1) érvényben marad, most viszont PM_1O_1 és PO_2M_2 az OP egyenes ellentétes oldalain vannak, hasonlóságukból tehát (2) helyett az következik, hogy

$$O_2P : O_2M_1 = O_2P : (O_2P + PM_1) = r_2 : (r_2 + r_1).$$

Emiatt most $r = OP = r_1 r_2 / (r_2 + r_1)$, $OO_2 = (r_2 - r_1)r_2 / (r_2 + r_1)$, tehát P az így meghatározott O körüli r sugarú kör O_1O_2 -vel alkotott metszéspontjaitól különböző pontjait járja be.