

Írjuk át az (1) egyenlet tizedes törtjeit racionális tört alakba. Akkor az

$$(1a) \quad \left(a + \frac{b}{9}\right)^2 = c + \frac{7}{9}$$

egyenlethez jutunk. A négyzetre emelést elvégezve és 9-cel szorozva a következő egyenletet kapjuk:

$$(1b) \quad 9a^2 + 2ab + \frac{b^2}{9} = 9c + 7.$$

Mivel a és c pozitív egész, ezért a $\frac{b^2}{9}$ -nek is egész számnak kell lennie, tehát b osztható hárommal. De b nem lehet sem 0, sem 9, mert akkor az (1) egyenlet bal oldalán egész szám állna, míg a jobb oldalon tört van. Így b csak 3 vagy 6 lehet. Vizsgáljuk meg ebben a két esetben a második feltételt is.

I. Ha $b = 3$, akkor az (1b) egyenletbe helyettesítve és c -t kifejezve :

$$c = \frac{3a^2 + 2a - 2}{3}$$

és

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{3a^2 + 5a - 2}{3a^2 - a - 2} = \frac{(a+2)(3a-1)}{(a-1)(3a+2)}.$$

A $3a-1$ és a $3a+2$ különbsége 3, így közös osztójuk 3-nak is osztója. Másrészt $3a-1$ nem osztható 3-mal, így ezek relatív prímelek. Tehát a (2) feltétel csak úgy teljesülhet, ha $3a+2$ osztója a nála kisebb $(a+2)$ -nek, ami nem lehet. Összegezve : $b = 3$ esetén nincs a feladat feltételeinek eleget tevő számhármasság.

II. Ha $b = 6$, akkor az (1b) egyenletbe helyettesítve és c -t kifejezve

$$c = \frac{3a^2 + 4a - 1}{3}$$

és

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{3a^2 + 7a - 1}{3a^2 + a - 1} = 1 + \frac{6a}{3a^2 + a - 1}.$$

Ahhoz, hogy ez egész szám legyen, szükséges, hogy

$$6a \geq 3a^2 + a - 1$$

legyen, amiből a

$$3a^2 - 5a - 1 \leq 0$$

másodfokú egyenlőtlenséget kapjuk, amelynek megoldása:

$$\frac{5 - \sqrt{37}}{6} \leq a \leq \frac{5 + \sqrt{37}}{6}.$$

Ebbe az intervallumba egyetlen pozitív egész szám esik, az 1. Ha $a = 1$, $b = 6$, akkor $c = 2$, és ez a számhármasság az egyetlen, amelyik a feladat minden követelményének eleget tesz.