

$$(1) \quad \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma > 2.$$

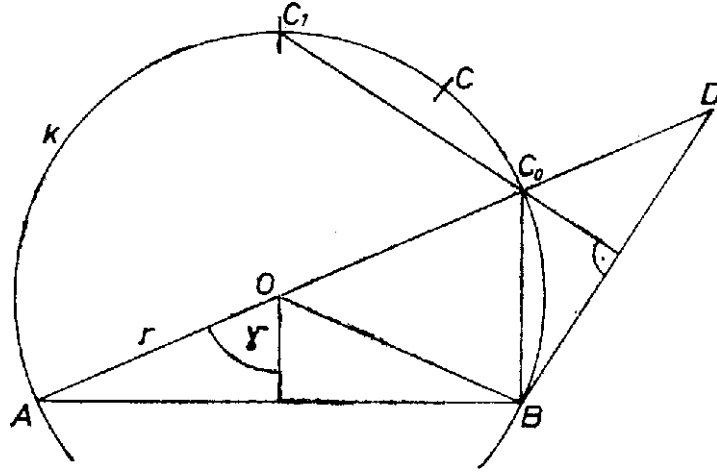
Tegyük fel, hogy az ABC háromszögben $AC \geq BC$, és jelöljük a háromszög köré írható kört k -val, sugarát r -rel. Ismeretes, hogy

$$\overline{AB} = 2r \sin \gamma, \quad \overline{BC} = 2r \sin \alpha, \\ \overline{CA} = 2r \sin \beta$$

így (1) ekvivalens azzal, hogy

$$(2) \quad \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} > 4r.$$

Jelöljük k -nak A -val átellenes pontját C_0 -lal, és az ABC_0 háromszög C_0 -beli külső szögfelezőjének k -val alkotott második metszéspontját C_1 -gyel.



C_1 felezi a nagyobbik AB ívet, és feltevéseink szerint C a C_0C_1 íven van. Mivel a C_0C_1 egyenes külső szögfelező, B -t C_0C_1 -re tükrözve az AC_0 egyenes C_0 -on túli meghosszabbításán levő pontot kapunk, jelöljük ezt D -vel. Az egész C_0C_1 ív a BD szakasz C_0C_1 felező merőleges egyenesének D -t tartalmazó oldalán van, ezért $\overline{BC} \geq \overline{DC}$. Az ACD háromszögben $\overline{AC} + \overline{CD} > \overline{AD}$, az ABC_0 háromszögben pedig $\overline{AB} + \overline{BC_0} \geq \overline{AC_0}$. Ezek alapján

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} \geq \overline{AB} + \overline{DC} + \overline{CA} > \overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC_0} + \overline{AC_0} > 2\overline{AC_0} = 4r,$$

amint azt bizonyítani akartuk.

Megjegyzés. Belátható, hogy a $0 < x < \pi$ szakaszon $\frac{\sin x}{x}$ az x monoton fogyó függvénye. Emiatt esetünkben a $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$, $\frac{\sin \beta}{\beta}$, $\frac{\sin \gamma}{\gamma}$ hányadosok mindegyike nagyobb $\frac{\sin \pi/2}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$ -nél és így $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma > (\alpha + \beta + \gamma) \frac{2}{\pi} = 2$.