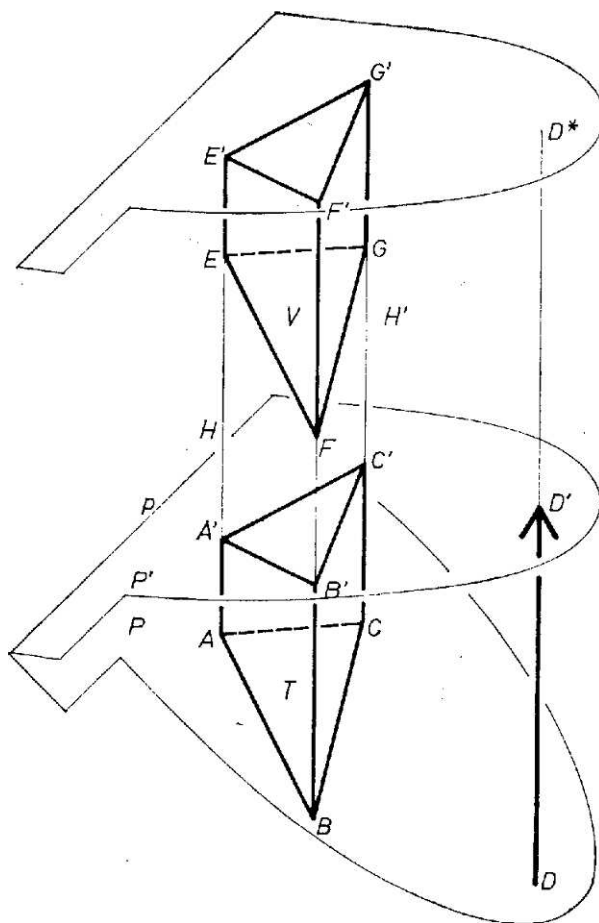


Ha az A, B, C pontok egy egyenesen vannak, (1) miatt B' is, C' is benne van az e és AA' által meghatározott síkban, és emiatt rajta vannak ennek a síknak P' -vel alkotott metszésvonalán is. Így tehát az A, B, C és az A', B', C' pontok egyszerre eshetnek csak egy egyenesre, amikor a mondott térfogatok 0-val egyenlőek.



A továbbiakban feltesszük, hogy az AA', BB', CC' egyenesek nincsenek egy síkban. Toljuk el a $T = ABCA'B'C'$ testet a $\overrightarrow{DD'}$ vektorral és jelöljük az új testet V -vel, csúcsait rendre E, F, G, E', F', G' -vel. (1) miatt V csúcsai rendre rajta vannak az AA', BB', CC' egyeneseken, így a $H = ABCEFG$ és $H' = A'B'C'E'F'G'$ hasábok alkotó egyenesei azonosak. Ha H -hoz hozzávesszük V -t, akkor ugyanazt a testet kapjuk, mintha H' -hoz hozzávennénk T -t, vagyis

$$(2) \quad H + V = H' + T.$$

Mivel itt T és V egybevágóak, ebből következik, hogy H és H' térfogata egyenlő.

Tudjuk, hogy az eltolás a síkot síkba viszi át, D' rajta van az EFG síkon, és H magassága egyenlő az $ABCD'$ tetraéder D' -höz tartozó magasságával. Ennek a két testnek ABC lapja közös, tehát H térfogata háromszorosa $ABCD'$ térfogatának. Toljuk el D' -t is a DD' vektorral, a kapott pont legyen D^* . Ez egyrészt benne van az $E'F'G'$ síkban, másrészt ugyanolyan messze van P' -től, mint D . A H' hasáb magassága tehát egyenlő az $A'B'C'D$ tetraéder D -hez tartozó magasságával, és H' térfogata háromszorosa $A'B'C'D$ térfogatának. Láttuk már, hogy H és H' térfogata egyenlő, ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzések. 1. Nem használtuk ki, hogy V és T diszjunktak, ami általában nem is igaz. Az efféle átdarabolásoknál mindig célszerűbb előbb hozzávenni az egyik testhez valamit (esetünkben T -hez H' -t), és csak aztán elvenni egy másik darabot az egyesítés révén kapott testből ($T + H'$ -ből V -t). Tulajdonképpen arra is csak a szemléletesség kedvéért volt szükségünk, hogy T test. Ezt a feladatnak az a feltétele biztosította, hogy a vizsgált pontok egy-egy fűlsíkban vannak benne. Igaz marad azonban a feladat állítása akkor is, ha benne a fűlsíkokat síkokkal helyettesítjük.

2. Belátható a feladat állítása annak alapján is, hogy a párhuzamos vetítés nem változtatja meg a területarányokat.