

A $\sqrt[3]{x}$ és a $\sqrt[3]{y}$ összegéről tudjuk, hogy racionális (ti. egyenlő 1-gyel). Ha sikerülne megmutatnunk, hogy különbségük is racionális, azzal a feladat állítását is igazolnánk, hiszen racionális számok összege, különbsége, valamint racionális szám fele is racionális.

Vizsgáljuk tehát a $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}$ különbséget. Az $u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2)$ összefüggés alapján

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}.$$

Itt a nevező sohasem lehet nulla (miért?), másrészt tudjuk, hogy a számláló racionális, elegendő igazolni, hogy a nevező is az. Ezt két lépésben látjuk be.

1. $\sqrt[3]{xy}$ racionális: az $(u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v)$ összefüggés alapján

$$1 = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3 = x + y + 3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) = x + y + 3\sqrt[3]{xy},$$

ahonnan azonnal látszik az állítás.

2. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}$ racionális:

$$1 = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^2 = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + 2\sqrt[3]{xy},$$

amiből a $\sqrt[3]{xy}$ racionalitása miatt az állítás következik. Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Orova Edit (Tata, Eötvös J. Gimn., I. o. t.)