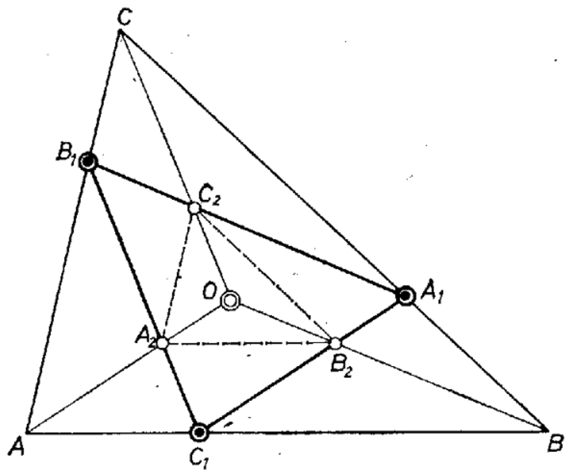
A feladatot mindjárt az általános alakjában oldjuk meg. Legyen tehát C_1, A_1, B_1 az AB, BC, CA szakaszoknak az a pontja, melyre

(1) $$AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = p : q.$$



Jelöljük a $p/(p+q)$, $q/(p+q)$ hányadosokat λ-val, μ-vel. Mivel p, q egy-egy szakasz hossza, λ, μ pozitívak, és összegük 1. Legyen O tetszőleges pont, és jelöljük általában az O-ból valamely nagy betűvel jelölt pontba mutató vektort megfelelő kis betűvel. Mivel az XY szakaszt $p:q$ arányban osztó Z pontra

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \lambda\overrightarrow{XY} = \mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \mu\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y},$$

(1) ekvivalens a

(2) $$\mathbf{c}_1 = \mu\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}; \qquad \mathbf{a}_1 = \mu\mathbf{b} + \lambda\mathbf{c}; \qquad \mathbf{b}_1 = \mu\mathbf{c} + \lambda\mathbf{a}$$

egyenletekkel.

Szorozzuk meg (2)-ben az első egyenletet λ-val, a másodikat μ-vel:

(3) $$\lambda\mathbf{c}_1 + \mu\mathbf{a}_1 = \lambda\mu\mathbf{a} + (\lambda^2 + \mu^2)\mathbf{b} + \lambda\mu\mathbf{c} = \lambda\mu(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) + (1 - 3\lambda\mu)\mathbf{b},$$

hiszen $1 - 3\lambda\mu = (\lambda+\mu)^2 - 3\lambda\mu = \lambda^2 - \lambda\mu + \mu^2$. Az itt fellépő $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$ összeg (2) szerint egyenlő $(\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1+\mathbf{c}_1)$-gyel, és mindkettő $\mathbf{0}$-val egyenlő, ha O-nak $A_1B_1C_1$ súlypontját választjuk.

Azt kaptuk tehát, hogy $\mathbf{b} = \kappa\mathbf{c}_2$, ahol $\mathbf{c}_2 = \lambda\mathbf{c}_1 + \mu\mathbf{a}_1$, és $\kappa = 1/(1-3\lambda\mu)$. Hasonlóan kapjuk $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$ értékeit is, tehát

(4) $$\mathbf{a} = \kappa\mathbf{a}_2, \qquad \mathbf{b} = \kappa\mathbf{b}_2, \qquad \mathbf{c} = \kappa\mathbf{c}_2,$$

ahol $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{c}_2$ az O-ból az A_2, B_2, C_2 pontokba mutató vektorok, és A_2, B_2, C_2 rendre a B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 szakaszoknak azon pontjai, amelyekre

(5) $$B_1A_2 : A_2C_1 = C_1B_2 : B_2A_1 = A_1C_2 : C_2B_1 = q : p.$$

Az A_1, B_1, C_1 pontok alapján az A_2, B_2, C_2 pontok megszerkeszthetők, és ezekből (4) alapján a keresett A, B, C pontokat az $A_1B_1C_1$ háromszög súlypontjából való $\kappa = 1/(1-3\lambda\mu) = (p+q)^2/(p^2 - pq + q^2)$ arányú nagyítással kapjuk meg.

Mivel $p^2 + q^2 > pq$, κ mindig nagyobb 1-nél, ha $p = 1$, $q = 2$, akkor $\kappa = 3$. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy a (4) alatti értékek kielégítik a (2) egyenleteket, ha

(6) $$\mathbf{a}_2 = \lambda\mathbf{b}_1 + \mu\mathbf{c}_1, \qquad \mathbf{b}_2 = \lambda\mathbf{c}_1 + \mu\mathbf{a}_2, \qquad \mathbf{c}_2 = \lambda\mathbf{a}_1 + \mu\mathbf{b}_1.$$

Például (3)-hoz hasonlóan

$$\mu\mathbf{c}_2 + \lambda\mathbf{a}_2 = \lambda\mu\mathbf{a}_1 + (\lambda^2 + \mu^2)\mathbf{b}_1 + \lambda\mu\mathbf{c}_1 = \lambda\mu(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 + \mathbf{c}_1) + (1 - 3\lambda\mu)\mathbf{b}_1,$$

és itt O választása miatt $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 + \mathbf{c}_1 = 0$. Így $\mu\mathbf{c} + \lambda\mathbf{a} = \kappa(\mu\mathbf{b}_2 + \lambda\mathbf{a}_2) = \kappa(1 - 3\lambda\mu)\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1$, amint azt bizonyítani akartuk.

Mivel az A, B, C pontok nincsenek egy egyenesen, az A_1, B_1, C_1 pontok sem lehetnek egy egyenesen. Különben tetszőleges, nem egy egyenesen levő A_1, B_1, C_1 ponthármashoz mindig pontosan egy megoldást kapunk.

Megjegyzés. Centrális nagyítás helyett egyszerűbben fejezhető be a szerkesztés úgy, hogy az A_1, B_1, C_1 pontokon át rendre párhuzamosakat húzunk a B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 egyenesekkel. Ennek az eljárásnak a helyességét azonban nehezebb belátni. Sokféleképpen megoldható a feladatunk, ha már tudjuk, hogy van megfelelő ABC háromszög. A megoldók többsége azonban adós maradt annak megmutatásával, hogy van ilyen háromszög, ami esetenként annak bizonyítását jelenti, hogy amit megszerkesztettek, az a keresett háromszög.