

Elegendő bizonyítanunk, hogy tetszőleges k^2 négyzetszámhoz található olyan m természetes szám, hogy

$$(1) \quad E(m + \sqrt{m}) \leq k^2 - 1 \quad \text{és} \quad E(m + 1 + \sqrt{m + 1}) \geq k^2 + 1.$$

Emiatt ugyanis, ha m -nél kisebb n számot veszünk, akkor $E(n + \sqrt{n})$ értéke legfeljebb $E(m + \sqrt{m})$ lehet, ha viszont n nagyobb m -nél, akkor $E(n + \sqrt{n})$ értéke legalább $E(m + 1 + \sqrt{m + 1})$. Tehát valóban semmilyen n értékre nem kaphatunk $E(n)$ -re k^2 -et.

(1)-nek eleget tevő m keresése közben az $m = k^2 - k$ -t sejtjük meg. Valóban, (1) első egyenlőtlensége kicsit más alakban

$$k^2 - k + \sqrt{k^2 - k} < (k^2 - 1) + \frac{1}{2}, \quad \text{azaz} \quad k^2 - k < k^2 - k + \frac{1}{4},$$

míg a második egyenlőtlenség

$$k^2 - k + 1 + \sqrt{k^2 - k + 1} > (k^2 + 1) - \frac{1}{2}, \quad \text{azaz} \quad k^2 - k + 1 > k^2 - k + \frac{1}{4},$$

tehát mindkettő igaz. Ezzel a feladat állítását beláttuk.