

$$(1) \quad \sqrt{x + a\sqrt{x} + b} = c.$$

Az (1) egyenletet emeljük négyzetre. Ez nem ekvivalens átalakítás, hamis gyök *jöhet be*, a megoldáshalmazból majd azokat ki kell zárni. Mindjárt csoportosítva, a következőt kapjuk:

$$(2) \quad (\sqrt{x})^2 + a\sqrt{x} + (b - c^2) = 0.$$

Ez másodfokú egyenlet $\sqrt{x}$ -re. Tudjuk, hogy ha egy másodfokú egyenletben a másodfokú tag együtthatója nem nulla, annak 0, 1 vagy 2 megoldása van. Most is ez a helyzet, (2)-nek 0 vagy 1, vagy 2 gyöke lehet a hamis gyökökkel együtt.

Vagyis az (1) egyenletnek sosem lehet végtelen sok megoldása.

Kiss Attila (Budapest, Könyves Kálmán Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. A feladat szövegéből sajnálatos módon egy $\sqrt{x}$ lemaradt. Az eredeti feladat így szólt:

Milyen összefüggés van az a , b , c paraméterek között, ha az alábbi egyenletnek végtelen sok megoldása van?

$$(3) \quad \sqrt{x + a\sqrt{x} + b} + \sqrt{x} = c.$$

Megoldás. Az egyenletet rendezés után négyzetre emelve

$$(4) \quad (a + 2c)\sqrt{x} = (c^2 - b).$$

Amennyiben (3) végtelen sok x -re teljesült, (4)-nek is végtelen sok x -re kell teljesülnie, ami viszont csak úgy lehet, ha

$$(5) \quad a = -2c \quad \text{és} \quad b = c^2.$$

Ezeket (3)-ba visszahelyettesítve, $\sqrt{x - 2c\sqrt{x} + c^2} + \sqrt{x} = c$, azaz $|c - \sqrt{x}| + \sqrt{x} = c$, vagyis az kell, hogy $\sqrt{x} \leq c$ teljesüljön végtelen sok x -re. Ez pedig pontosan akkor áll, ha

$$(6) \quad 0 < c.$$

Így (5) és (6) összefüggéseknek kell teljesülniük, ha (3)-nak végtelen sok megoldása van, és ha ezek teljesülnek, (3)-nak végtelen sok megoldása van.

Bene Gyula (Miskolc, Földes F. Gimn., II. o. t.)