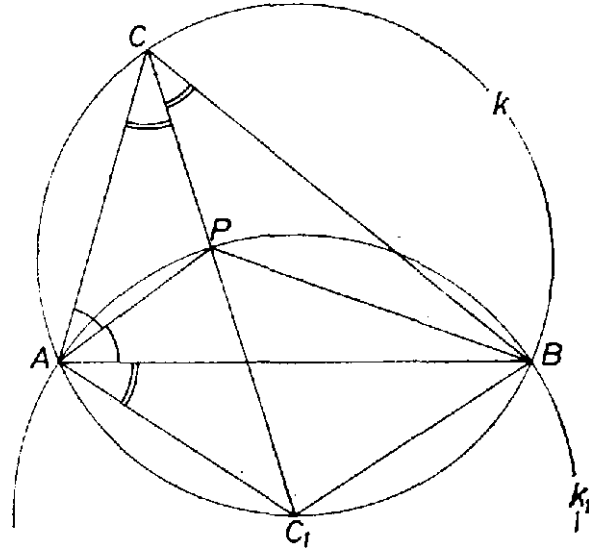


Legyen ABC tetszőleges háromszög, melynek k a körülírt köre és P a beírt kör középpontja. Jelöljük a CP egyenes k -val alkotott második metszéspontját C_1 -gyel.



Ismeretes, hogy C_1 felezi az őt tartalmazó AB ívet, és így $AC_1 = BC_1$. Az ACP háromszögnek APC_1 külső szöge, tehát

$$(1) \quad APC_1 \sphericalangle = PAC \sphericalangle + PCA \sphericalangle.$$

Mivel PA , PC felezi az ABC háromszög A -nál, C -nél levő szögeit, $PAC \sphericalangle = PAB \sphericalangle$, $PCA \sphericalangle = PCB \sphericalangle$. Ez utóbbi viszont a kerületi szögek tétele miatt egyenlő a BAC_1 szöggel. Ezek szerint

$$(2) \quad PAC \sphericalangle = PAB \sphericalangle, \quad PCA \sphericalangle = BAC_1 \sphericalangle,$$

és így $APC_1 \sphericalangle = PAC_1 \sphericalangle$, vagyis az APC_1 háromszögben $AC_1 = PC_1$. Tehát a C_1 középpontú, A -n, B -n átmenő k_1 kör átmegy P -n.

Ezek alapján a szerkesztés menete a következő. Legyen C a k kör tetszőleges pontja, C_1 a CP egyenes k -val alkotott második metszéspontja, és A , B a C_1 középpontú, P -n átmenő k_1 kör k -val alkotott metszéspontjai. Amiatt, hogy P a k belső pontja, a mondott metszéspontok valóban léteznek. Mivel $AC_1 = BC_1$, PC az ABC háromszög belső szögfelezője. P az AB -nek ugyanazon az oldalán van, mint C , hiszen ott van k_1 -nek P -n átmenő AB íve is. Így P az ABC háromszög belső pontja. Elég megmutatnunk, hogy PA felezi a háromszög A -nál levő szögét, hiszen így már két szögfelezőről fogjuk tudni, hogy átmegy P -n, tehát beláttuk, hogy az ABC háromszögnek megvannak a kívánt tulajdonságai. Mivel most tudjuk, hogy APC_1 egyenlőszárú, és továbbra is fennáll (1), elég a (2) alatti egyenlőségek közül az egyiket belátni, abból már következik a másik. A kerületi szögek tétele miatt $BAC_1 \sphericalangle = BCC_1 \sphericalangle$ és azt már tudjuk, hogy CC_1 szögfelező, tehát $BCC_1 \sphericalangle = C_1CA \sphericalangle$, ami viszont azonos a PCA szöggel. A megszerkesztett háromszög tehát valóban megfelelő.

Megjegyzés. Többet láttunk be, mint kellett, hiszen a C csúcsot is tetszőlegesen vettük fel. Ha PC átmérő k -ban, ABC egyenlőszárú lesz, és általában C megválasztásával meghatározhatjuk az ABC háromszög alakját. Meglepő tétele Eulernek, hogy viszont az ABC -be írt kör sugara nem függ C megválasztásától. Javasoljuk az olvasónak, próbálja meg belátni ezt a nevezetes állítást. Mi például a 43. kötetünk 198–199. oldalain közöltünk rá két bizonyítást, közülük a második azonos a Kürschák–Hajós–Neukomm–Surányi: Matematikai versenytételek I. 3. kiadás 40. oldalán találhatóval.