$$EC : BM = FC : DM. \tag{1}$$

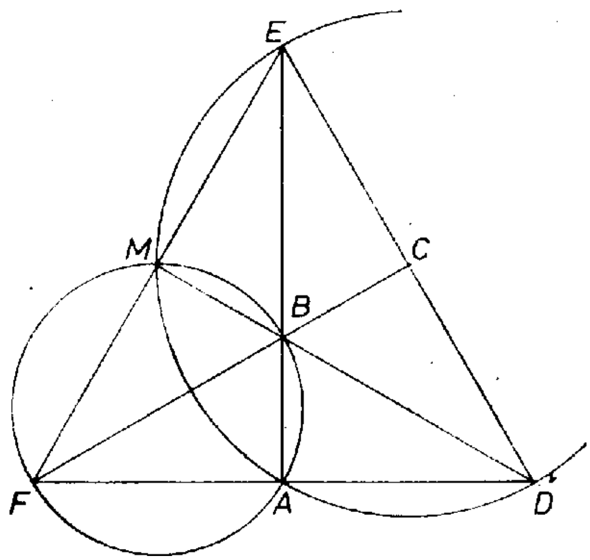
A feladat sajtóhibásan jelent meg. Helyesen a szövege a következő:
Bizonyítsuk be, hogy

$$EC : BM = FC : FM.$$

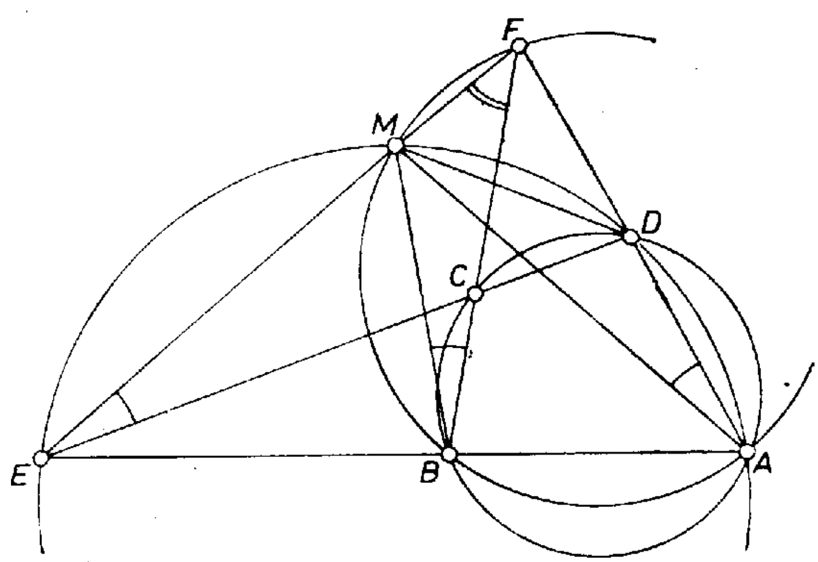
A feladat állítása így nem igaz. Tekintsük a következő ellenpéldát: ha az $ABCD$ húrnégyszög AB és DC oldalának E, BC és AD oldalának F metszéspontja D-vel éppen szabályos háromszöget határoznak meg, a szabályos háromszög oldalát egységnyinek véve,

$$EC = \frac{1}{2}, \qquad BM = \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$FC = DM = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

az (1) arány tehát nem állhat fenn.



Most tekintsünk egy tetszőleges $ABCD$ húrnégyszöget, és vizsgáljuk meg, milyen feltétel mellett lesz igaz az (1) állítás. A négyszög csúcsainak körüljárási iránya az E és F pontokat nem változtatja meg, ezért válasszuk a betűzést úgy, hogy az A és F a BM egyenes ugyanazon oldalára essék.



Először azt látjuk be, hogy az E, M és F pontok mindig egy egyenesen vannak.

Az $ABCD$ és az $EADM$ négyszög is húrnégyszög, ezért

$$EMD\sphericalangle = BCD\sphericalangle.$$

Az $EMFC$ négyszögben $CEM\sphericalangle + EMF\sphericalangle + MFC\sphericalangle + FCE\sphericalangle = 360°$, de $CEM\sphericalangle = DEM\sphericalangle = DAM\sphericalangle$, mivel $EADM$ húrnégyszög, és $MFC\sphericalangle = MFB\sphericalangle = MAB\sphericalangle$ az $ABMF$ húrnégyszögből, és $FCE\sphericalangle = DCB\sphericalangle$, a bal oldalon álló három szög összege $180°$, amiből következik, hogy $EMF\sphericalangle = 180°$.

A szögek egyenlőségéből következik, hogy az EFC háromszög hasonló az MBF háromszöghöz, s így $EC : BM = FC : FM$.

Az (1) arány tehát csak úgy állhat fenn, ha $FM = DM$, s ez volt az eredeti állítás is.