

Jelöljük az n szám hetes számrendszerbeli alakját (a számjegysorozatát) α_n -nel, ennek a számjegysorozatnak a k alapú számrendszerbeli értékét $\alpha_n^{\overline{k}}$ -val. Hasonlóan a nyolcas, illetve kilences számrendszerre β_n , γ_n , illetve $\beta_n^{\overline{k}}$, $\gamma_n^{\overline{k}}$, jelöléseket vezetjük be. Világos, hogy

$$n = \alpha_n^{\overline{7}} = \beta_n^{\overline{8}} = \gamma_n^{\overline{9}},$$

továbbá azokat az n számokat kell meghatároznunk, amelyekre

$$(1) \quad 24\,875 < \alpha_n^{\overline{10}} + \beta_n^{\overline{10}} + \gamma_n^{\overline{10}} < 25\,125.$$

Vegyük észre, hogy ha n értékét növeljük, akkor a $\alpha_n^{\overline{7}}$, $\beta_n^{\overline{8}}$, $\gamma_n^{\overline{9}}$, is nő, ám ezzel együtt a $\alpha_n^{\overline{10}}$, $\beta_n^{\overline{10}}$ és $\gamma_n^{\overline{10}}$ is. Így az (1)-nek egymás utáni egész számok tesznek eleget, azaz elég megkeresni azt a legkisebb n -et, amire az $\alpha_n^{\overline{10}} + \beta_n^{\overline{10}} + \gamma_n^{\overline{10}}$ összeg már nagyobb 24 875-nél, és a legnagyobb olyat, amire az összeg még kisebb 25 125-nél.

Megmutatjuk, hogy β_n nem lehet ötjegyű. Tegyük fel, hogy $\beta_n^{\overline{10}} \geq 10\,000$, azaz $n = \beta_n^{\overline{8}} \geq 10\,000^{\overline{8}} = 4096$. Ekkor $\alpha_n^{\overline{7}} \geq 4096 = 14\,641^{\overline{7}}$ és $\gamma_n^{\overline{9}} \geq 4096 = 5551^{\overline{9}}$, vagyis $\alpha_n^{\overline{10}} + \beta_n^{\overline{10}} + \gamma_n^{\overline{10}} \geq 14\,641 + 10\,000 + 5551 = 30\,192$. Így β_n legfeljebb négyjegyű, azaz $\beta_n^{\overline{10}} \leq 7777$. Sőt β első jegye nem lehet hetes sem. Ugyanis az előzőekhez hasonlóan $3584 = 13\,310^{\overline{7}} = 7000^{\overline{8}} = 4822^{\overline{9}}$ alapján ebben az esetben

$$\alpha_n^{\overline{10}} + \beta_n^{\overline{10}} + \gamma_n^{\overline{10}} \geq 13\,310 + 7000 + 4822 = 25\,132$$

volna, ami még mindig több 25 125-nél. Ám az $n = 3583$ érték már megfelelő:

$$\alpha_{3583}^{\overline{10}} + \beta_{3583}^{\overline{10}} + \gamma_{3583}^{\overline{10}} = 13\,306 + 6777 + 4821 = 24\,904.$$

Ezzel a keresett számok közül a legnagyobbat, 3583-at megkaptuk. Ha most 3583-at legfeljebb 6-tal csökkentjük, $\alpha_n^{\overline{10}}$ és $\beta_n^{\overline{10}}$ is legfeljebb 6-tal, $\gamma_n^{\overline{10}}$ legfeljebb 7-tel csökken, így az összegük még mindig több lesz 24 875-nél. Viszont $n = 3583 - 7 = 3576$ -ra már az $\alpha_n^{\overline{10}}$ is több, mint 40-nel kevesebb $\alpha_{3583}^{\overline{10}}$ -nál, tehát a feladatot kielégítő számok között a legkisebb 3577.

Összefoglalva, a kiindulási szám 3577, 3578, 3579, 3580, 3581, 3582 vagy 3583 valamelyike lehetett.