

A kérdéses kifejezést írjuk át az

$$(1) \quad x^2 + (y + a)x + (y^2 + by + c)$$

alakba. Ez a kifejezés pontosan akkor lesz minden (x, y) számpárra pozitív, ha y tetszőleges rögzített értéke mellett (1) minden x számra pozitív. Mivel (1)-ben az x^2 -es tag együtthatója pozitív, ez pontosan akkor következik be, ha (1) diszkriminánsa, azaz $(y + a)^2 - 4(y^2 + by + c)$ negatív, azaz ha

$$(2) \quad 3y^2 + y(4b - 2a) + (4c - a^2) > 0.$$

Így (1) pontosan akkor pozitív minden (x, y) számpárra, ha (2) teljesül minden y számra. Ez utóbbi viszont akkor teljesül, ha (2) diszkriminánsa negatív, azaz

$$(3) \quad a^2 - ab + b^2 < 3c,$$

amivel a keresett feltételt megadtuk.

Nagy Attila (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. A kifejezés négyszeresét megfelelő módon átalakítva a következő alakhoz jutunk:

$$(2x + y + a)^2 + 3 \left(y + \frac{2b - a}{3} \right)^2 + \left(4c - a^2 - \frac{(2b - a)^2}{3} \right).$$

Könnyen látható, hogy ez pontosan akkor lesz minden (x, y) -ra pozitív, ha a harmadik tagja pozitív, amiből ismét a (3) feltételt kapjuk.

Megjegyzés. Eredményünk azt jelenti, hogy az $x^2 + xy + y^2 + ax + by$ függvény minimuma $(ab - a^2 - b^2)/3$.