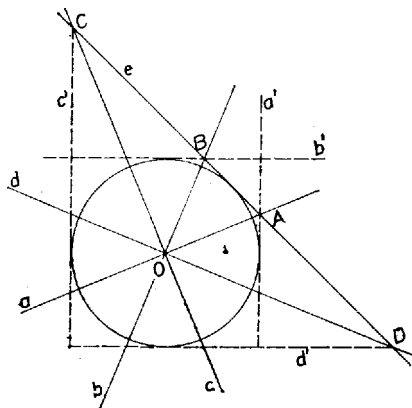
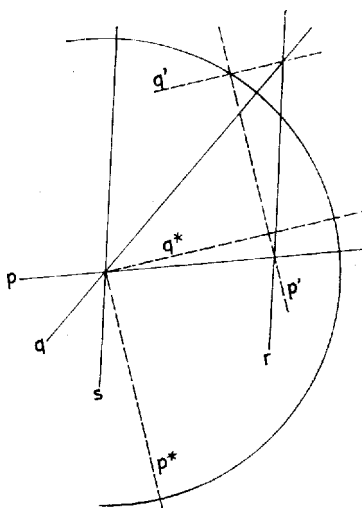


A feladat szövege nem zárja ki azt, hogy b és d azonosak legyenek, legyük fel azonban először, hogy ez nincs így. Ekkor b merőleges d -re és az a, b ; b, c ; c, d ; d, a párok közti szögek mind 45° -osak. Megrajzolva a mondott második érintőket, azt tapasztaljuk, hogy azok egy négyzetet határoznak meg.



Ennek igazolása érdekében megmutatjuk, hogy ha a p, q egyenesek 45° -os szöget zárnak be, és r tetszőleges egyenes, amelynek p -re vonatkozó tükörképe p' , q -ra vonatkozó tükörképe pedig q' , akkor p' merőleges q' -re.

Jelöljük p és q metszéspontját M -mel, az M -en át r -rel párhuzamosan húzott egyenest s -sel, s -nek p -re, q -ra vonatkozó tükörképét p^* -gal, illetve q^* -gal.



Mivel párhuzamos egyeneseknek tetszőleges egyenesre vonatkozó tükörképe párhuzamos, p' párhuzamos p^* -gal, és q' q^* -gal. Elég tehát belátnunk, hogy p^* merőleges q^* -ra. Ha s -t M körül elforgatjuk pozitív irányban α szöggel, p^* is, q^* is negatív irányban fordul el M körül α szöggel, tehát a p^*, q^* közti szög közben változatlan marad. Forgassuk el s -t addig, míg p -vel azonos nem lesz, ekkor p^* is azonos p -vel, q^* pedig p -nek q -ra vonatkozó tükörképe lesz, ami valóban merőleges p -re.

Rátérünk feladatunk állításának az igazolására. Jelöljük a mondott érintőt e -vel, e -nek az a, b, c, d egyenesekkel alkotott metszéspontját A -val, B -vel, C -vel, D -vel, az ezekből húzott második érintőt rendre a' -vel, b' -vel, c' -vel, d' -vel. Mivel az A -ból a körhöz húzott két érintő szimmetrikus OA -ra, a' az e -nek a -ra vonatkozó tükörképe. Hasonlóan a b', c', d' érintők e -nek a b, c, d egyenesekre vonatkozó tükörképei. Mivel az a, b, c, d egyenesek között rendre 45° -os szög van, a' merőleges b' -re, b' c' -re, c' d' -re és d' a' -re. Emiatt a' párhuzamos c' -vel, de nem lehet vele azonos, mert e -t különböző pontokban metszik. Hasonlóan b' és d' párhuzamosak és különbözőek. Mivel ezek az egyenesek érintik a kört, valóban négyzetet határoznak meg.

Ha b és d mégis azonosak volnának, akkor b' és d' is azonosak, tehát a négyzetnek csak három oldalát kapjuk meg, de az egyik oldalát kétszer. Ebben az esetben az a', b', c', d' egyenesek nem határoznak meg négyszöget a szokásos értelemben.

Lelovics Ferenc (Miskolc, Földes F. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. A feladattal kapcsolatban számos versenyző küldött be dolgozatot, melyeknek jelentős százalékát nem lehetett megoldásként értékelni. Ennek fő oka, hogy sok kezdő pontverseny-résztvevő úgy gondolta, hogy a „Mit mondhatunk a négyszögről?” kérdésre elegendő egy mondatral válaszolni, egy ábra alapján: „Ez a négyszög négyzet.” Nyilvánvaló, hogy egy matematikai versenyfeladat megoldásának egzakt bizonyítást vagy igazolt helyességű eljárást

kell tartalmaznia! Szintén jelentős volt azoknak a száma, akik a feladatot geometriai szerkesztési problémának tekintették, és egy véletlenszerű e egyenes felvételével megszerkesztették az ábrát. Ennek során részletesen leírták azokat a szerkesztési lépéseket, amelyek tömör és általános formában a feladat kitűzésében szerepeltek! Ezután fölösleges diskusszió következett – amelynek eredményeként megállapították, hogy a szerkesztés nem végezhető el akkor, amikor e nem metszi valamelyik egyenest – vagyis amit eleve kizárt a kitűzés.