

Ha csak az első, $a_1, a_2, \dots$ sorozatot vizsgáljuk, két eset lehetséges: vagy van olyan A szám, amelynél a sorozat minden tagja kisebb, vagy nincs. Az első esetben a sorozatban csak véges sok különböző szám fordul elő, van tehát közöttük olyan, amelyik végtelen sokszor szerepel. Legyen m ilyen szám, és legyen $i_1 < i_2 < \dots < i_n < \dots$ a sorozat m -mel egyenlő tagjainak az indexe. Ha a sorozatból csak ezeket az elemeket vesszük ki, csupa egyenlő számot kapunk:

$$a_{i1} = a_{i2} = \dots = a_{in} = \dots$$

A másik esetben legyen $i_1 = 1$, és legyen i_2 a sorozat első a_1 -nél nem kisebb tagjának indexe. Mivel most tetszőleges A számhoz található a sorozatban legalább A -val egyenlő elem, van ilyen i_2 . Továbbmenve minden $n > 2$ számhoz lépésről lépésre határozzuk meg az i_n indexet úgy, hogy i_n legyen a sorozat első $a_{i_{n-1}}$ -nél nem kisebb tagjának az indexe. Feltevésünk szerint minden n -hez találunk ilyen i_n -t. Ha a sorozatból csak az így kapott indexekhez tartozó elemeket vesszük ki, azokra

$$a_{i1} \leq a_{i2} \leq \dots = a_{in} \leq \dots$$

teljesül.

A két esetet összefoglalva elmondhatjuk, hogy minden természetes számokból álló sorozatnak van olyan részsorozata, amelyben egyik tag sem kisebb az előtte állónál, azaz a részsorozat *monoton növvő*. (Ha egy sorozatban minden tag nagyobb az előtte állónál, akkor *szigorúan monoton növvőnek* nevezik.)

Tekintsük az $a_1, a_2, \dots$ sorozatnak az előbbiek szerint létező monoton növvő részsorozatát:

$$(3) \quad a_{i1} \leq a_{i2} \leq \dots = a_{in} \leq \dots$$

Tekintsük most a $b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in}, \dots$ sorozatot. Ha erre alkalmazzuk az $a_1, a_2, \dots$ sorozatra bizonyított állításunkat (alkalmazhatjuk, hiszen ez is természetes számokból álló végtelen sorozat), olyan $j_1 < j_2 < \dots$ indexeket is találhatunk, amelyekre

$$(4) \quad b_{j1} \leq b_{j2} \leq \dots \leq b_{jn} \leq \dots$$

másrészt (3) szerint

$$(5) \quad a_{j1} \leq a_{j2} \leq \dots \leq a_{jn} \leq \dots$$

hiszen a j indexek az i -k közül kerültek ki. Végül a bizonyított állítást a $c_{j1}, c_{j2}, \dots, c_{jn}, \dots$ sorozatra alkalmazva kapjuk, hogy vannak olyan $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$ indexek, amikre (4) és (5) szerint

$$(6) \quad \begin{aligned} a_{k1} &\leq a_{k2} \leq \dots \leq a_{kn} \leq \dots \\ b_{k1} &\leq b_{k2} \leq \dots \leq b_{kn} \leq \dots \\ c_{k1} &\leq c_{k2} \leq \dots \leq c_{kn} \leq \dots \end{aligned}$$

Így (2) például $p = k_2, q = k_1$ választással teljesül.

Megjegyzés. A megoldásból az is adódott, hogy végtelen sok p, q párt is tudunk választani, valamint hogy a feladat állítása nemcsak három, hanem tetszőleges sok sorozatra is igaz. Viszont ha végtelen sok sorozatot engedünk meg, úgy már az állítás nem igaz. Legyenek ugyanis a sorozatok

$$\begin{aligned} &1, 0, 0, 0, \dots \\ &0, 1, 0, 0, \dots \\ &0, 0, 1, 0, \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ekkor nincs olyan p és q természetes szám, hogy minden sorozatban a p -edik tag legalább akkora, mint a q -adik.