

$$(1) \quad \log_x(x+y) + \log_y(x+y) = 4$$

$$(2) \quad (x-1)(y-1) = 1.$$

Ahhoz, hogy (1)-ben a logaritmusoknak értelmük legyen, ki kell kötnünk, hogy

$$(3) \quad x > 0, \quad y > 0, \quad x \neq 1, \quad y \neq 1,$$

azaz csak olyan (x, y) párok lehetnek az egyenletrendszer megoldásai, melyek (3)-t kielégítik. (2)-ben a műveleteket elvégezve;

$$(4) \quad x + y = xy,$$

ezt (1)-be helyettesítve

$$\begin{aligned} \log_x(xy) + \log_y(xy) &= 2 + \log_x y + \log_y x = 4 \\ \log_x y + \frac{1}{\log_x y} &= 2. \end{aligned}$$

Innen $(\log_x y - 1)^2 = 0$, azaz $\log_x y = 1$, $x = y$. Ezt (2)-be helyettesítve $(x-1)^2 = 1$, ahonnan $x = 0$ vagy $x = 2$. (3) miatt $x = 0$ nem lehet megoldás, tehát az egyenletrendszer megoldása egyedül $x = y = 2$ lehet. S hogy ez valóban megoldás, visszahelyettesítéssel azonnal adódik.

Juhász Ágnes (Tata, Eötvös J. Gimn., I. o. t.)