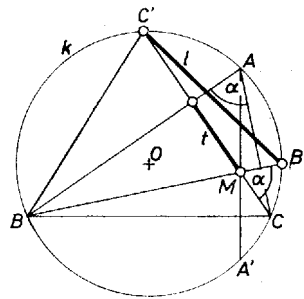


1. Ismeretes, hogy az M magasságpontnak mindhárom oldalegyenesre való tükörképe rajta van a háromszög köré írt k körön. Ezért M -nek AC -re való M_b tükörképe azonos B' -vel, hiszen így $MM_b \perp AC \perp MB$, és M -en át csak egy merőleges van AC -re, másrészt MB és k közös pontjai B és B' . Ugyanígy C' az M -nek AB -re való tükörképe. Eszerint $B'A = MA = C'A$, vagyis B' , C' és M egy A középpontú k_1 körön vannak rajta. E kör két húrja $C'B' = l$ és $C'M = 2t$.

2. Megmutatjuk, hogy az $AB'C'$ egyenlő szárú háromszög A -nál levő szöge $2 \cdot BAC \triangleleft = 2\alpha$, illetve $2(180^\circ - \alpha)$ aszerint, hogy α hegyesszög, illetve tompaszög. Ennek alapján A , majd k_1 az l -ből és α -ból megszerkeszthető, és rajta M kijelölhető lesz, továbbá B' , C' , A meghatározza k -t, és ebből MB' kimetszi B -t, MC' pedig C -t.

Egy konkrét háromszögből kiindulva, k_1 révén a $B'AC'$ középponti szög kétszer akkora, mint vagy a $B'MC'$ kerületi szög, vagy ennek a kiegészítő szöge aszerint, hogy M a $B'C'$ egyenesnek az A -t tartalmazó partján van, illetve a másik partján. Továbbmenve, a $B'MC'$ szög mindenképpen egyenlő a BMC szöggel, mert ha M kívül adódik k -n, akkor e két szög azonos, ha pedig M a k -ban van, akkor egymás csúcshelyei, hiszen M a BB' és CC' húrok közös pontja. M -nek k -hoz képest külső, illetve belső helyzete – mint ismeretes – azon múlik, hogy van-e tompaszög az ABC háromszög szögei közt, vagy nincs. (Derékszögű háromszögben M azonos a derékszög csúcsával.) Tekintsük külön-külön az eseteket.

Hegyzőszögű háromszögben $B'MC' \triangleleft = BMC \triangleleft = BA'C \triangleleft = 180^\circ - BAC \triangleleft = 180^\circ - \alpha$, ahol A' az M -nek BC -re való tükörképe (1. ábra).

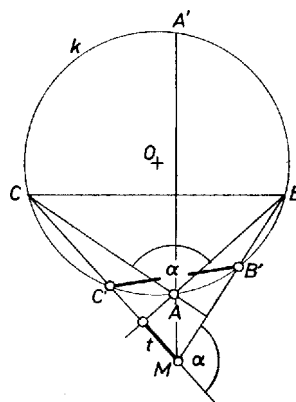


1. ábra

Másrészt $B'C'$ elválasztja A -t M -től, hiszen ekkor B' a B -t nem tartalmazó AC íven van, C' a C -t nem tartalmazó AB íven, vagyis a pontok sorrendje C, B', A, C', B , és M a CC' BB' szakaszok közös pontja. Így a fentiek szerint

$$B'AC' \triangleleft = 2(180^\circ - B'MC' \triangleleft) = 360^\circ - 2BMC \triangleleft = 2\alpha.$$

Tompaszögű háromszögben, ha α hegyesszög, választhatjuk úgy a betűzést, hogy $\beta > 90^\circ$, hiszen a B és C , illetve B' és C' pontok szerepe feladatunk szempontjából egyező (2. ábra).



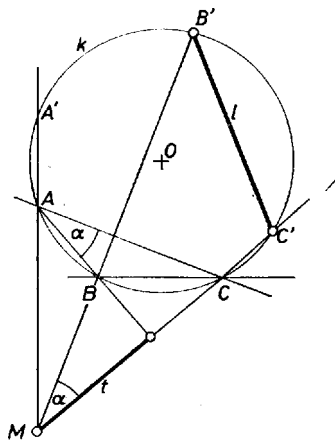
2. ábra

Ekkor B' az MCC' egyenesnek B -t tartalmazó partján van,

$$B'MC' \triangleleft = 90^\circ - MCA \triangleleft = BAC \triangleleft = \alpha,$$

tehát ekkor is $B'AC' \triangleleft = 2\alpha$. – Ha viszont $\alpha > 90^\circ$, akkor M az AA' -nek A -n túli meghosszabbításán van, vagyis $B'C'$ -nek A -t tartalmazó partján (3. ábra), így

$$B'AC' \triangleleft = 2 \cdot B'MC' \triangleleft = 2 \cdot BA'C \triangleleft = 2(180^\circ - BAC \triangleleft) = 2(180^\circ - \alpha).$$

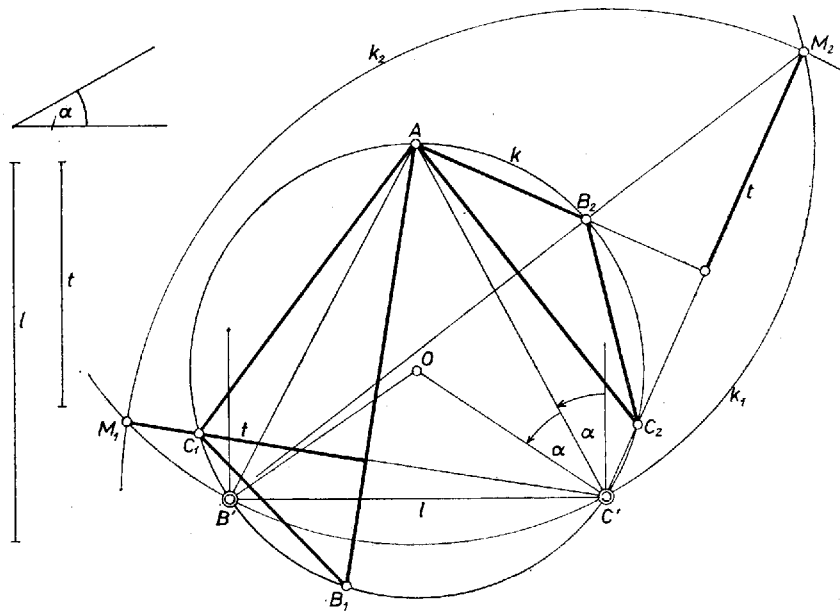


3. ábra

Ezzel állításunk bizonyítását befejeztük, a szerkesztés egy lehetséges végrehajtását pedig már fönt vázoltuk.

A végrehajtásból kiküszöbölhetjük az α hegyes- vagy tompaszög voltából adódó vagylagosságot. Fölvesszük a $B'C' = l$ szakasz helyzetét, és C' körül $2t$ sugárral k_2 kört írunk. $B'C'$ -re a végpontjaiban egyirányú merőleges félegyeneseket állítunk. Ezeket B' , illetve C' körül egymás felé elfordítjuk α -val, metszéspontjuk adja A -t, majd még egyszer α -val, ezek metszéspontja O , a k középpontja. Megrajzoljuk k_1 -et, ez a k_2 -t a magasságpont lehetséges M_1 , M_2 helyzeteiben metszi, majd k -t, ez $M_i B'$ -ből B -t, $M_i C'$ -ből C -t metszi ki, ahol $i = 1, 2$. Amennyiben a BAC szög $(180^\circ - \alpha)$ -nak adódik, az a megoldás nem felel meg.

A szerkesztés helyességének belátását az olvasóra hagyjuk.



Az előírt méretek között a megoldást biztosító nagyságviszonyokat pontosan egy egyszerű trigonometriai számítás adhatná meg. Külön megemlíjtjük az $\alpha = 90^\circ$ esetet. Ebből adódik, hogy csak $l = 0$ és $t = 0$ lehet, különben az adatrendszer ellentmondó; ha viszont $l = t = 0$, akkor tetszőleges derékszögű háromszög megfelel, tehát ez az adatrendszer határozatlan. Külön-külön is szükséges, hogy $l \neq 0$ és $t \neq 0$. A fent leírt szerkesztésben az elsőként felhasznált l -re természetesen nincs korlátozás, t -re viszont felső korlátot szab, hogy nem lehet nagyobb $C'A$ -nál.