

Első lépésként határozzuk meg azokat az  $A, B, C, D$  számjegyeket, amikre a sorozat első három tagja négyzetszám.

Tudjuk, hogy egy szám hárommal osztva ugyanannyi maradékot ad, mint a számjegyeinek az összege. Ezért ha  $C + D$  nem osztható hárommal, akkor

$$AB, \quad ACDB, \quad \text{valamint} \quad ACCDDB$$

számokat hárommal osztva három különböző maradékot kapunk. Másrészt tudjuk, hogy egy négyzetszám 3-mal osztva 0 vagy 1 maradékot ad, így sorozatunk első három tagja nem adhat három különböző maradékot. Következésképp  $(C + D)$ -nek oszthatónak kell lennie hárommal.

Az iskolai függvénytáblázat négy értékes jegyet ad meg, így a századot és ezredet nem tartalmazó számok négyzetei pontos értékükkel szerepelnek. Ezek között kell olyan  $AC, DB$  alakú számokat keresnünk, amelyekre  $AB$  négyzetszám és  $C + D$  osztható hárommal. Négy ilyen számot találunk:

$$11,56 = 3,4^2; \quad 19,36 = 4,4^2; \quad 44,89 = 6,7^2; \quad 67,24 = 8,2^2.$$

Az első és harmadik esetben  $ACDDB$  négyzetszám:  $111\,556 = 334^2$  illetve  $444\,889 = 667^2$ , míg a másik két esetben

$$199\,336 = 8 \cdot 24\,917, \quad \text{illetve} \quad 677\,224 = 8 \cdot 84\,653$$

nem négyzetszám, hiszen 8-cal osztható négyzetszám 16-tal is osztható.

Ezek szerint  $A, B, C, D$  lehetséges értékei:

$$\begin{aligned} A = 1, \quad B = 6, \quad C = 1, \quad D = 5, \quad \text{illetve} \\ A = 4, \quad B = 9, \quad C = 4, \quad D = 8. \end{aligned}$$

A gyakorlat állításának igazolásához tehát azt kell belátnunk, hogy az

$$1 \underbrace{1 \dots 1}_{n-1} \underbrace{5 \dots 5}_{n-1} 6, \quad \text{illetve} \quad 4 \underbrace{4 \dots 4}_{n-1} \underbrace{8 \dots 8}_{n-1} 9$$

számok minden  $n$ -re négyzetszámok. Ez viszont az

$$\begin{aligned} 1 \underbrace{1 \dots 1}_{n-1} \underbrace{5 \dots 5}_{n-1} 6 &= \overbrace{11 \dots 11}^{2n} + 4 \cdot \overbrace{1 \dots 11}^n + 1 = \\ &= \frac{10^{2n} - 1}{9} + 4 \cdot \frac{10^n - 1}{9} + 1 = \left( \frac{10^n + 2}{3} \right)^2, \\ 4 \underbrace{4 \dots 4}_{n-1} \underbrace{8 \dots 8}_{n-1} 9 &= 4 \cdot \overbrace{11 \dots 11}^{2n} + 4 \cdot \overbrace{1 \dots 11}^n + 1 = \\ &= 4 \cdot \frac{10^{2n} - 1}{9} + 4 \cdot \frac{10^n - 1}{9} + 1 = \left( \frac{2 \cdot 10^n + 1}{3} \right)^2 \end{aligned}$$

összefüggésekből látszik. A jobb oldali zárójelben levő számok egészek, hiszen a számlálóban álló szám számjegyeinek összege osztható 3-mal, így maga a szám is.

Ezzel a feladatot megoldottuk.

*Bodó Zalán* (Budapest, I. István Gimn., II. o. t.)