

$$(1) \quad y = x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots + \sqrt{x + \sqrt{y}}}}}, \quad (2) \quad x + y = 6.$$

Tekintsük először az (1) egyenlet helyett a nála egyszerűbb

$$(3) \quad y = x + \sqrt{y}$$

egyenletet. Azt állítjuk, hogy a (3), (2) rendszer megoldása kielégíti az (1), (2) egyenletrendszert is. Oldjuk meg ehhez a (3) és (2) egyenletekből álló egyenletrendszert! (2)-t (3)-ba helyettesítve:

$$2y - \sqrt{y} - 6 = 0$$

másodfokú egyenlet $\sqrt{y}$ -ra. Ennek egyetlen nemnegatív gyöke $\sqrt{y} = 2$, ahonnan (2) szerint a (2), (3) egyenletrendszer egyetlen megoldása

$$(4) \quad y = 4, \quad x = 2.$$

Ez az értékpár kielégíti az (1) egyenletet is, hiszen mindegyik négyzetgyökjel alatt álló kifejezés értéke $2 + 2 = 4$ lesz.

Azt állítjuk, hogy az (1), (2) egyenletrendszernek nincs más megoldása. Ehhez elegendő belátnunk, hogy az egyenletrendszer minden x, y megoldása kielégíti a (3) egyenletet. Ezt az állítást indirekt úton bizonyítjuk be: feltesszük, hogy van olyan x, y pár, mely kielégíti az (1), (2) egyenleteket, de (3)-at nem. Ebből a feltevésből ellentmondásra jutunk.

Ha (3) nem áll fenn, akkor vagy $y < x + \sqrt{y}$ vagy pedig $y > x + \sqrt{y}$. Tekintsük az első esetet. Mivel x és y olyan számokat jelentettek, melyek az (1) egyenletet kielégítik, azért $y \geq 0$ és $x + \sqrt{y} \geq 0$ is fennáll. Így az $y < x + \sqrt{y}$ egyenlőtlenség mindkét oldalából négyzetgyököket vonhatunk:

$$\sqrt{y} < \sqrt{x + \sqrt{y}}, \quad x + \sqrt{y} < x + \sqrt{x + \sqrt{y}}, \quad \text{vagyis} \quad y < x + \sqrt{y}$$

miatt az

$$y < x + \sqrt{x + \sqrt{y}}$$

egyenlőtlenség is áll. Ebből ugyanígy azt kapjuk, hogy az

$$y < x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{y}}}$$

is igaz, végül pedig azt kapjuk, hogy az

$$y < x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots + \sqrt{x + \sqrt{y}}}}$$

(1974 gyökjel) egyenlőtlenség is igaz. Ezt (1)-gyel összevetve $y < y$, ami nem lehet, ellentmondás.

Hasonlóan juthatunk ellentmondásra az $y > x + \sqrt{y}$ esetben. Így az eredeti egyenletrendszer egyetlen megoldása:

$$x = 2, \quad y = 4.$$