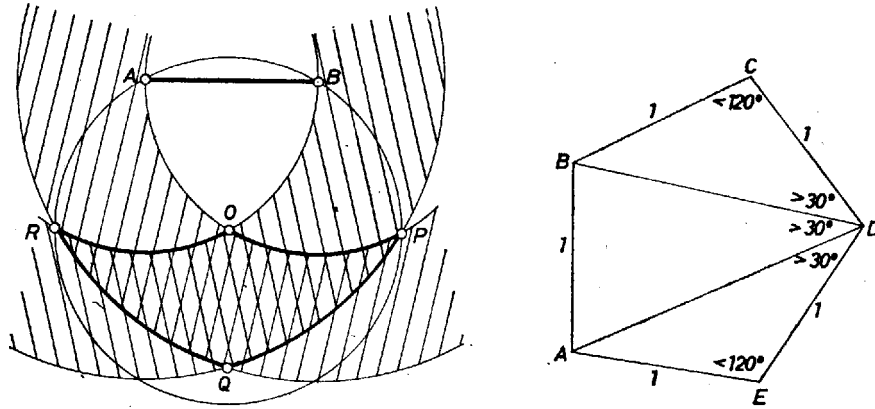


Válasszuk egységnek az ötszög oldalát, és jelöljük a legnagyobb szög nagyságát ω -val, a legkisebbét ϱ -val. A feladat feltevése szerint $\omega < 120^\circ$, és azt kell belátnunk, hogy $\varrho > 90^\circ$. Mivel az ötszög szögeinek az összege nem kisebb $(4\omega + \varrho)$ -nál, ezért

$$4\omega + \varrho \geq 540^\circ,$$

amiből $\omega = 120^\circ$ alapján $\varrho > 60^\circ$ következik. Eszerint az ötszög szögei 60° és 120° közöttiek, tehát az átlók nagysága 1 és $\sqrt{3}$ között van. (Az 1 szárrakkal szerkesztett egyenlő szárú háromszögben – amelyet alkot egy szabályos háromszög két csúcsa és a középpontja – az alap hossza $\sqrt{3}$.) Tekintsük az ötszög egyik oldalát, és írjunk a végpontjai körül 1 és $\sqrt{3}$ sugarakkal köröket. A választott oldallal szemközi csúcsnak a körök által határolt körgyűrűben kell lennie: megmutatjuk, hogy emiatt ebből a csúcsból a szemközi oldal 30° -nál nagyobb szög alatt látszik.



Jelöljük a választott oldal végpontjait A -val, B -vel, az egységnyi sugarú körök egyik metszéspontját O -val, és a két körgyűrű közös részének O -val megegyező oldalon levő darabkájának a további csúcsait P -vel, Q -val, R -rel. Ekkor (mint az könnyen igazolható) ABO , BOP , AOR szabályos háromszögek, és $OQ < 1$. Tehát a körívekkel határolt $OPQR$ idom belseje benne van az O körüli egység sugarú körben. Ennek a körnek a belső pontjaiból az AB szakasz az $\widehat{AB}$ -hez tartozó kerületi szögnél nagyobb szög alatt látszik, s mivel ez a kerületi szög az O -t tartalmazó oldalon 30° -os, állításunkat beláttuk.

Beláttuk tehát, hogy az AB -vel szemközi D csúcsra $ADB \angle > 30^\circ$. A BCD háromszög egyenlő szárú, és benne $BCD \angle < 120^\circ$. Emiatt $BDC \angle > 30^\circ$, és hasonlóan $ADE \angle > 30^\circ$. Tehát az ötszög D -nél levő szögére

$$CDE \angle = BDC \angle + ADB \angle + ADE \angle > 90^\circ$$

teljesül: ez a szög tompaszög. Mivel az ötszög tetszőleges oldalából indultunk ki, ezzel beláttuk, hogy az ötszög mindegyik szöge tompaszög.