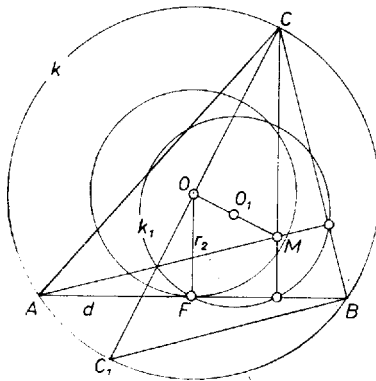


E kör középpontja az MO szakasz O_1 felezőpontja, sugara $\frac{r}{2}$.



Pitagorasz-tétele szerint

$$OF = r^2 - \frac{d^2}{4},$$

ahol d az AB hossza, tehát F rajta van a O középpontú, $r^2 = \sqrt{r^2 - \frac{d^2}{4}}$ sugarú k_2 körön is.

A k_2 kört megkapjuk, ha k -ban tetszőleges d hosszúságú húrt veszünk fel, r_2 ennek a húrnak O -tól mért távolsága. Megszerkeszthetjük k_1 -et is, k_1 és k_2 metszéspontjainak egyike lesz F . Mivel a két metszéspont szimmetrikus OM -re, az egyikből kapott háromszöget OM -re tükrözve a másikhoz tartozó megoldást kapjuk. Legyen tehát a metszéspontok egyike F (vagy ha a két kör érinti egymást, F legyen az érintési pont). M -nek F -re vonatkozó tükörképe C_1 , C_1 -nek k -beli átellenes pontja C , az A , B csúcsokat pedig az OF -re F -ben emelt merőleges metszi ki k -ból.

Az így megszerkesztett háromszögnek k körülírt köre, AB hossza $2\sqrt{r^2 - r_2^2} = d$, és M a háromszög magasságpontja, hiszen az egyik csúc átellenes pontjának a szemkölti oldalfelezőpontjára vonatkozó tükörképe.

A k_1, k_2 körök létrejönnek, ha $0 < d < 2r$. E két kör metszi egymást, ha

$$|r_1 - r_2| < \frac{1}{2}OM < r_1 + r_2$$

azaz

$$\left| r - \sqrt{4r^2 - d^2} \right| < OM < r + \sqrt{4r^2 - d^2}.$$

Ha itt egyenlőtlenség helyett valahol az egyenlőség jele érvényes, k_1 és k_2 érinti egymást. Ha $d = 2r$, OM értéke csak r lehet, azaz M rajta van k -n. Tehát a keresett háromszögben C -nél derékszög van, C azonos M -mel, és AB a k kör tetszőleges M -en át nem menő átmérője lehet. Különben $r_2 > 0$, tehát F nem lehet O -val azonos, és így AB -t F már egyértelműen meghatározza.

Ha tehát $d > 2r$, nincs megoldás, $d = 2r$ esetén csak akkor van megoldás, ha M rajta van k -n, ekkor viszont végtelen sok megoldás van. Ha $0 < d < 2r$, a megoldások száma rendre 2, 1, vagy 0, ha OM hossza az $\left| r - \sqrt{4r^2 - d^2} \right|$, $r + \sqrt{4r^2 - d^2}$ értékek közé esik, ezek egyikével egyenlő, vagy e határokon kívül esik.