

$$(1) \quad \sqrt[4]{16+x} + \sqrt[4]{16-x} = 4.$$

I. megoldás. Emeljük négyzetre (1) két oldalát és a kapott egyenletben rendezés után ismét emeljünk négyzetre.

$$\begin{aligned} \sqrt{16+x} + \sqrt{16-x} &= 16 - 2\sqrt[4]{256-x^2}, \\ 32 + 2\sqrt{256-x^2} &= 256 - 64\sqrt[4]{256-x^2} + 4\sqrt{256-x^2}. \end{aligned}$$

Vezessük be új változónak a $\sqrt[4]{256-x^2}$ kifejezést, erre a fenti egyenletből az

$$y^2 - 32y + 112 = 0$$

egyenletet kapjuk. Ennek a gyökei az $y_1 = 4$, $y_2 = 28$ számok, közülük csak az első jöhet szóba, hiszen $\sqrt[4]{256-x^2} \leq 4$. Az elsőből az $x = 0$ értéket kapjuk, amelyik valóban gyöke (1)-nek.

Piriti Zsuzsa (Nagykanizsa, Landler J. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Az egyenlet bal oldalának az értéke $x = 0$ mellett 4, ez tehát gyöke (1)-nek. Megmutatjuk, hogy ha a, b tetszőleges nemnegatív számok, akkor

$$(2) \quad \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} \leq 2\sqrt[4]{\frac{a+b}{2}},$$

és a két oldal csak akkor egyenlő, ha $a = b$. Emiatt ha $x \neq 0$, (1) bal oldalának az értéke – ha értelmezve van – kisebb, mint 4, tehát (1)-nek csak $x = 0$ a gyöke.

Bizonyítsuk be előbb (2) helyett a négyzetgyökökre vonatkozó megfelelő állítást. Ha A, B tetszőleges nemnegatív számok, akkor

$$(3) \quad \sqrt{A} + \sqrt{B} \leq 2\sqrt{\frac{A+B}{2}},$$

és a két oldal csak akkor egyenlő, ha $A = B$. Mivel itt mindkét oldal nemnegatív, vehetjük a két oldal négyzetét:

$$A + 2\sqrt{AB} + B \leq 2(A+B),$$

amiből a $(\sqrt{A} - \sqrt{B})^2 \geq 0$ egyenlőtlenséget kapjuk. Ez valóban igaz, és itt a két oldal csak akkor egyenlő, ha $A = B$. Alkalmazzuk ezt az állítást az $A = \sqrt{a}$, $B = \sqrt{b}$ számokra, kapjuk, hogy

$$\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} \leq 2\sqrt{\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}}.$$

A jobb oldalon álló kifejezésre ismét alkalmazva (3)-at kapjuk, hogy

$$2\sqrt{\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}} \leq 2\sqrt[4]{\frac{a+b}{2}}.$$

E két egyenlőtlenségből következik (2), és mivel az egyenlőség jele bennük csak az $a = b$ mellett érvényes azt is beláttuk, hogy ez (2) esetében is így van.

Megjegyzés. A bizonyított (2) egyenlőtlenséget a következő formában írhatjuk:

$$\left(\frac{a^{1/4} + b^{1/4}}{2}\right)^4 \leq \left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Az egyenlőtlenség bal oldalán szereplő kifejezés az a és b számok $1/4$ -ed rendű *hatványközepének* hívják. Általában $a_1, a_2, \dots, a_n$ számok α -ad rendű hatványközepének a

$$H_\alpha(a_1, \dots, a_n) = \left(\frac{a_1^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}$$

értéket hívjuk. Így például a számtani közép ugyanazoknak a számoknak elsőrendű hatványközepe. A hatványközepekre a következő tétel igaz, ha $\alpha < \beta$, akkor az α -rendű hatványközep nem nagyobb a β -rendű hatványközépénél, azaz

$$H_\alpha(a_1, \dots, a_n) \leq H_\beta(a_1, \dots, a_n),$$

és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. A megoldásban az $n = 2$, $\alpha = 1/4$ és $\beta = 1$ értékkel bizonyítottuk ezt az egyenlőtlenséget.