

Jelöljük x -szel azoknak a dióknak a számát, melyek az utolsó osztzkodáskor jutottak egy-egy gyereknek. Így az utolsó osztzkodás előtt a zsákban $(5x + 1)$ db dió volt. Az ötödik gyerek a zsákból egy diót a majomnak adott és a megmaradt diók egyötödét kivette, így maradt a zsákban $(5x + 1)$ dió. Tehát előzőleg $1 + \frac{5}{4}(5x + 1)$ diónak kellett a zsákban lennie. Ugyanígy kapjuk, hogy mielőtt a negyedik gyerek osztotta el a diókat, a zsákban

$$1 + \frac{5}{4} \left(1 + \frac{5}{4}(5x + 1) \right)$$

diónak kellett lennie.

Ezt folytatva kapjuk, hogy a zsákban eredetileg

$$1 + \frac{5}{4} \left\{ 1 + \frac{5}{4} \left[1 + \frac{5}{4} \left(1 + \frac{5}{4} \left(1 + \frac{5}{4}(5x + 1) \right) \right) \right] \right\}$$

dió volt. A kijelölt műveleteket elvégezve, majd az

$$a^6 - b^6 = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$$

azonosságot felhasználva:

$$\begin{aligned} & \frac{5^6x + 5^5 + 5^4 \cdot 4 + 5^3 \cdot 4^2 + 5^2 \cdot 4^3 + 5 \cdot 4^4 + 4^5}{4^5} = \\ & = \frac{5^6x + \frac{5^6 - 4^6}{5 - 4}}{4^5} = \frac{5^6(x + 1)}{4^5} - \frac{4^6}{4^5} = \frac{5^6(x + 1)}{4^5} - 4. \end{aligned}$$

A feladat megfogalmazásából következik, hogy ennek természetes számnak kell lennie. Ehhez nyilván szükséges, hogy a különbség első tagja egész legyen, azaz $5^6 \cdot (x + 1)$ -nek oszthatónak kell lennie 4^5 -nel. A szorzat első tényezője relatív prím 4^5 -hez, azért 4^5 csak akkor lesz osztója a szorzatnak, ha a második tényezőnek, $(x + 1)$ -nek osztója. Így $(x + 1)$ értéke legalább 4^5 . A zsákban található diók száma akkor a legkevesebb, ha x a lehető legkevesebb. Így a zsákban eredetileg legalább

$$\frac{5^6 \cdot 4^5}{4^5} - 4 = 15\,621$$

dió volt.

Ha viszont a zsákban pontosan 15 621 dió volt, akkor a leírt osztzkodást el is lehetett végezni:

Az első gyerek elvitt	$\frac{15\,620}{5} = 3124$ diót, maradt 12 496 dió.
A második elvitt	$\frac{12\,495}{5} = 2499$ diót, maradt 9996 dió.
A harmadik elvitt	$\frac{9995}{5} = 1999$ diót, maradt 7996 dió.
A negyedik elvitt	$\frac{7995}{5} = 1599$ diót, maradt 6396 dió.
Az ötödik elvitt	$\frac{6395}{5} = 1279$ diót, maradt 5116 dió.
Végül még mindegyik kapott.	$\frac{5115}{5} = 1023$ diót.

Bogdán Klára (Cegléd, Tánicsics M. Ált. Isk. 7. o. t.)