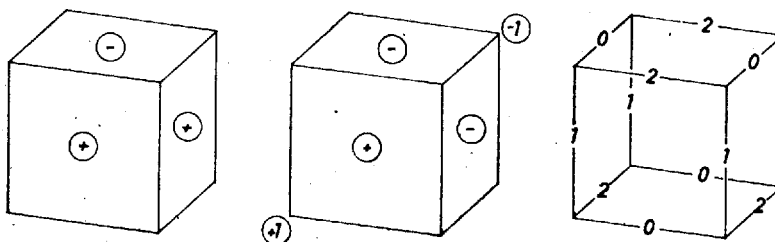


Jelöljük a kocka lapjain keletkező összegek értékét S -sel, és képzeletben duplázzuk meg az élekre írt számokat: az élekhez csatlakozó mindkét lapra írjuk fel az élekhez rendelt számok egy-egy példányát. Válasszuk ki a kocka valamelyik párhuzamos él-négyesét, és tartsuk úgy a kockát, hogy a választott él függőlegesek legyenek. Szorozzuk meg a két vízszintes lapon levő számokat (-1) -gyel, s ezután adjuk össze a kockán levő $2 \cdot 12$ számot. Az összegezést kétféle sorrendben végezhetjük el: ha először a lapokon összegezzük a számokat, a vízszintes lapokon $(-S)$ -et, a függőlegeseken $(+S)$ -et kapunk, a teljes összeg tehát $4S - 2S = 2S$. Ha viszont először az élek mentén adjuk össze a számokat, a vízszintes élekhez írt számok „kiesnek”, hiszen a hozzájuk csatlakozó vízszintes és függőleges lapokon álló számok egymás (-1) -szeresei. A függőleges élek mentén minden számot kétszer kell vennünk, tehát a teljes összeg a függőleges élekhez rendelt négy szám F összegének a kétszerese. Ezzel beláttuk, hogy $2S = 2F$, azaz $F = S$, amint ezt bizonyítanunk kellett.



Hasonlóan láthatjuk be a feladat második állítását is. Térjünk vissza az eredeti számokhoz, majd szorozzuk meg a kocka választott csúcsához csatlakozó lapokon levő számokat (-1) -gyel. A teljes összeg most először a lapokon összegezve $3S - 3S = 0$ -nak adódik. Az éleken összegezve a választott csúcsához csatlakozó éleken a számok (-2) -szeresét, a szemközti csúcsához csatlakozó éleken a számok 2-szeresét kapjuk, a többi él mentén pedig minden számot egyszer $(+1)$ -gyel, egyszer (-1) -gyel szorozva kell az összegbe belevennünk, ezek a számok tehát kiesnek. A teljes összeg fele tehát a két szemközti csúcsához tartozó összegek különbsége. Mivel a teljes összeg 0, ezek az összegek egyenlők, ezzel a második állítást is bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Nem vizsgáltuk, vajon lehetséges-e a számoknak a fenti módon való felírása, pedig az ilyen – ún. egzisztencia- (létezési) kérdést tulajdonképpen minden olyan esetben föl kell vetni, ami a megszokottól többé-kevésbé eltér.

Gyorsan megnyugtathatjuk magunkat: lehetséges a felírás mindjárt úgy, hogy mindegyik élre ugyanazt a számot írjuk. Az ilyen – ún. triviális – megoldás viszont nem „érdekes”.

Valamivel érdekesebb, ha kiindulásul az alapélekre váltakozva 0-t és 2-t írunk és az oldalélek közül háromra 1-et – evvel a fentiek szerint a hátralevő öt él száma is meg van határozva – de a második tulajdonság teljesülése még így is triviális: mindegyik csúcsba egy 0-s, egy 1-es és egy 2-es él fut be.