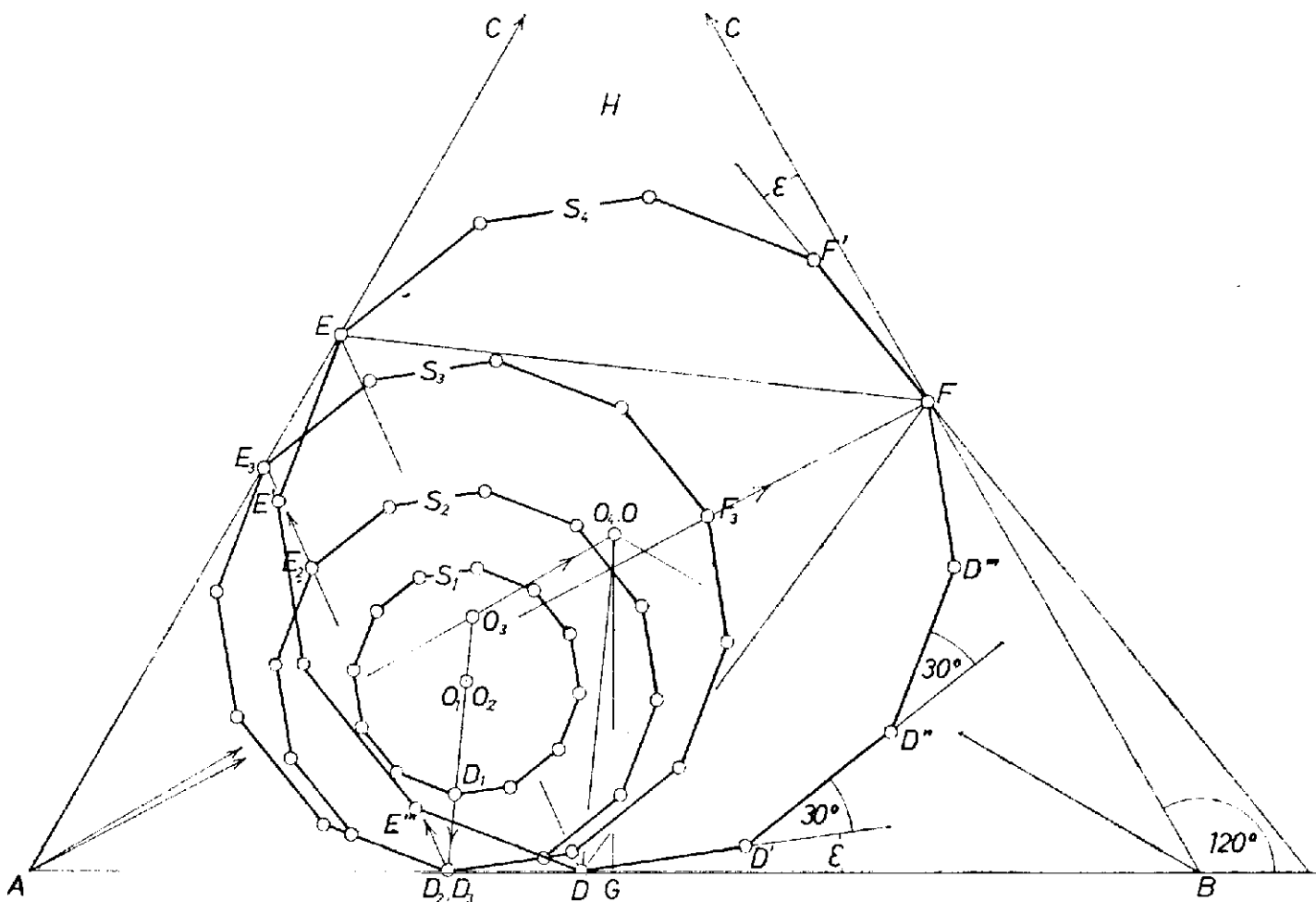


1. Azt állítjuk, hogy a maximális területű kivágott szabályos 12-szög lemeznek az adott $ABC = H$ háromszöglemez mindegyik oldalán van csúcspontja. Ha ugyanis egy S_1 szabályos 12-szög teljesen a H belsejében van, akkor nagyítható az O_1 középpontjából mint centrumból olyan S_2 -vé, amelynek legalább egy csúcsa (azaz O_1 -től legtávolabbi pontjának egyike) rajta van H kerületén, de S_2 -nek nincs pontja H -n kívül. Legyen egy ilyen csúcsa D_2 és H -nak ehhez támaszkodó oldala AB . Ha S_2 -nek nincs pontja az AC , BC oldalak egyikén sem, akkor nagyítható az előbbi korlátozás mellett S_3 -má úgy a D_2 centrumból, hogy S_3 -nak már van egy E_3 csúcsa, mondjuk AC -n. És ha S_3 teljesen az A -t tartalmazó felében volna a BC -vel kettévágott síknak, akkor az A centrumból való alkalmas arányú nagyítással előáll S_4 szabályos 12-szögnek már a lemez BC oldalán is lesz egy F csúcsa; legyenek a D_2 -ből és E_3 -ből most nyert csúcsok D , ill. E .



Tegyük fel egyenlőre, hogy S_4 -nek D -ből induló oldalai közül egyik sem illeszkedik AB -re, ekkor tekintsük D -ből F felé haladva S_4 egymás utáni oldalainak irányszögét AB -hez mint alapidányhoz viszonyítva. Azt akarjuk ezzel belátni, hogy F az S_4 -nek D -től számítva negyedik csúcsa. Mivel a szabályos 12-szög külső szöge $360^\circ/12 = 30^\circ$, ezért az első (DD') oldal irányszöge 0° és 30° között van, a másodiké ($D'D''$ -é) 30° -kal nagyobb, tehát 30° és 60° között, a k -adiké $(k-1) \cdot 30^\circ$ és $k \cdot 30^\circ$ között. Másrészt BC irányszöge $120^\circ = 4 \cdot 30^\circ$ vagyis a D -től számított 4. és 5. oldal irányszöge közé esik, és ez igazolja állításunkat. (Az 5. az FF' oldal egyenese már B -n túl metszi AB -t.) Hasonlóan az E csúcs sorszáma F -től is, D -től is 4, ennél fogva a DF , FE , ED átlók egyenlők.

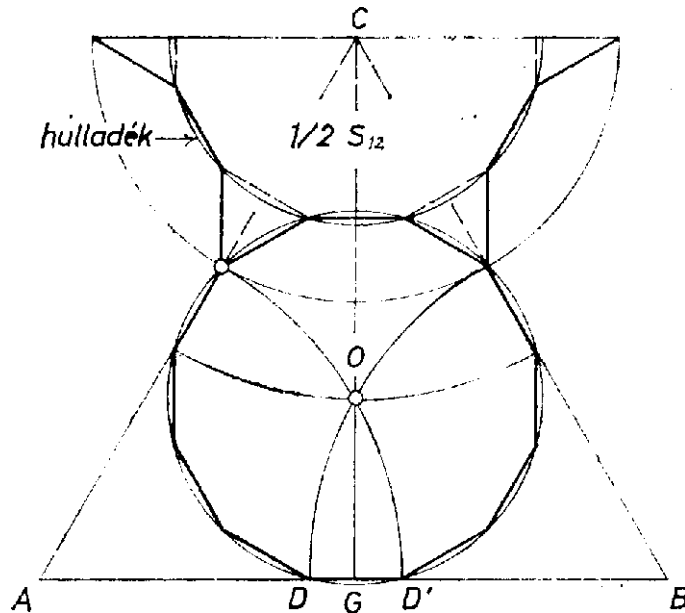
Pontosabban megnézve az is adódik, hogy az F utáni FF' oldalnak BC -hez viszonyított ε irányszöge egyenlő a $D'DB$ szöggel, így $FDB \angle = FDD' \angle + \varepsilon = EFF' \angle + \varepsilon = EFC \angle = DEA \angle$, tehát a DFB , FEC , EDA háromszögek (egyező körüljárással) egybevágók, egymásba átvihetők a DFE háromszög O_4 középpontja körüli 120° -os elfordításokkal. Ámde A -nak, B -nek és C -nek ciklikusan egymásba 120° -os elfordításokkal való átvitele csak H -nak O centruma körül lehetséges, eszerint S_4 -nek O_4 középpontja azonos O -val.

Azt is föltehetjük, hogy a $D'DB \angle = E'''DA \angle$ – ez csak jelölés dolga –, így $DB \geq DA$.

Most már szinte nyilvánvaló, hogy az S_4 -nél nagyobb szabályos 12-szög lemez is kivágható H -ból. Ilyet így kapunk: S_4 -et addig fordítjuk el O körül, hogy DD' párhuzamos legyen AB -vel – eközben D és az egész S_4 a H belsejébe jut –, majd ezt a helyzetét nagyítjuk O -ból. Az arányt növelve D és D' (F , F' , E , E') új helyzete egyszerre jut a háromszög kerületére és ennél nagyobb 12-szög nem vágható ki, hiszen akkor beírt körének sugara egyenlő a H -ba írt kör sugarával.

Mindjárt a nagyítások után adódott volna ez a helyzet, ha S_1 -nek egy oldala párhuzamos AB -vel, így DD' vagy DE''' ráesik AB -re.

2. A kapott helyzetben ODB szög fele akkora, mint a 12-szög belső szöge, eszerint BOD egyenlő szárú háromszög, D -t a B körüli BO sugarú körrel metszhetjük ki, így pedig $DD' = 2(DB - GB) = 2 \cdot OB - AB = \frac{4}{3}CG - AB = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right)AB = 30,9 \text{ mm}$ (ahol G az AB oldal felezőpontja).



3. Ismeretes, hogy a szabályos 12-szög területe 3-szor akkora, mint a körülírt kör sugara fölé szerkesztett négyzet területe: $3 \cdot OD^2$.
 $3 \cdot OD^2 = 3(OG^2 + DG^2) = (2 - \sqrt{3})AB^2$. A háromszöglemez területe $(\sqrt{3}/4) \cdot AB^2$, a hulladék $(5\sqrt{3} - 8)/4 \cdot AB^2$,
 ez $5 - \frac{8}{\sqrt{3}} = 0,381$ része az adott lemez területének.