

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^2 + y^2 = 13, \\ (2) \quad & x^3 + y^3 = 35. \end{aligned}$$

1. Rendszerünket könnyen átalakíthatjuk úgy, hogy új ismeretleneknek az $x+y = u$ összeget és az $xy = v$ szorzatot tekinthessük:

$$\begin{aligned} (1a) \quad & x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = u^2 - 2v = 13, \\ (2a) \quad & x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = u^3 - 3uv = 35. \end{aligned}$$

Innen v -t kiküszöbölve:

$$(3) \quad u^3 - 39u + 70 = 0.$$

Vegyük észre, hogy $u_1 = 2$ kielégíti az egyenletet, és így a bal oldal átalakítható $(u-2)$ és egy másodfokú polinom szorzatává:

$$(u-2)(u^2 + 2u - 35) = 0.$$

Így pedig további két gyök adódik az

$$u^2 + 2u - 35 = 0$$

egyenletből: $u_2 = 5$, $u_3 = -7$. Tehát (3) bal oldala így írható:

$$(u-2)(u-5)(u+7).$$

Ez nem lehet 0, ha u értéke különbözik 2-től, 5-től és -7 -től, tehát (3)-nak több gyöke nincs.

v megfelelő értékei $v_1 = (u_1^2 - 13)/2 = -4,5$; $v_2 = 6$, $v_3 = 18$.

2. Mármost az

$$\begin{aligned} x + y &= u, \\ xy &= v \end{aligned}$$

rendszerből y kiküszöbölésével

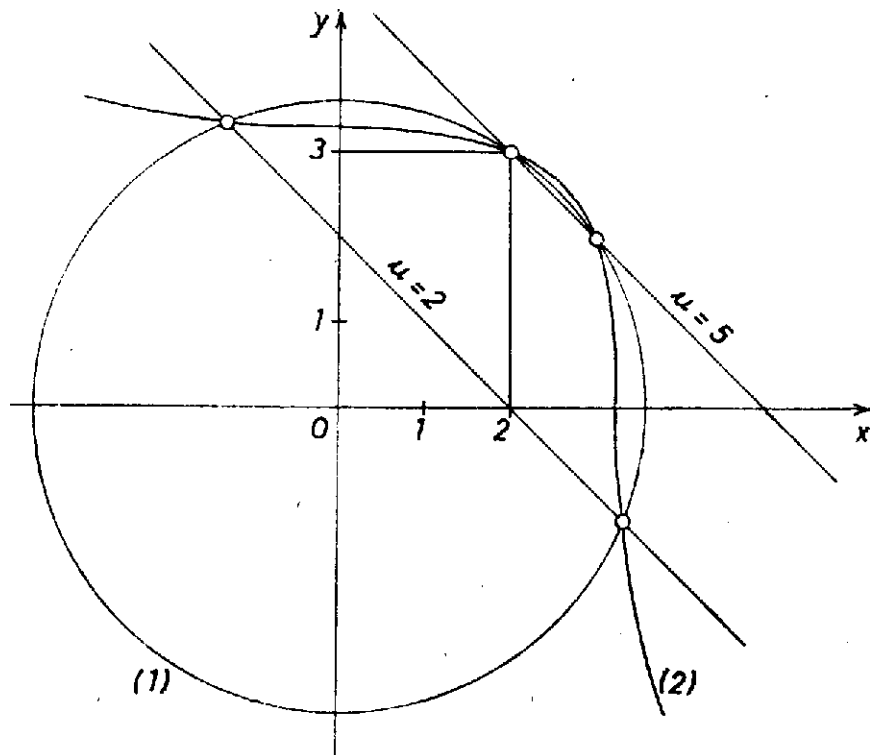
$$x^2 - ux + v = 0, \quad x_{1,2} = \frac{1}{2}(u \pm \sqrt{u^2 - 4v}).$$

Ide u és v összetartozó párjait behelyettesítve az első két pár alapján két-két megoldását kapjuk az eredeti rendszernek:

$$\begin{aligned} u = 2, v = -4,5 \text{ mellett: } & x_1 = 3,345, & y_1 &= -1,345; \\ & x_2 = -1,345, & y_2 &= 3,345; \\ u = 5, v = 6 \text{ mellett } & x_3 = 3, & y_3 &= 2; \\ & x_4 = 2, & y_4 &= 3. \end{aligned}$$

Az $u = -7$, $v = 18$ értékpár nem ad valós x , y értékpárt. – Ezzel a megoldást befejeztük.

Megjegyzés. Könnyű felismerni, hogy a $(2, 3)$ és $(3, 2)$ egész számpárok kielégítik a rendszert. Erre támaszkodva grafikusán folytathatjuk a megoldást. (1)-nek az origó körül $r = \sqrt{13}$ sugárral írt kör pontjai tesznek eleget, (2)-nek a két tengelyen a $(\sqrt[3]{35} = 3,271; 0)$, illetve a $(0; 3,271)$ pont, amelyek a kör belsejében vannak, hiszen $\sqrt{13} = 3,605 > 3,271$.



Azt várjuk viszont, hogy a (2)-t ábrázoló vonal kilép a körből, hiszen $y = \sqrt[3]{35 - x^3}$ alapján minden valós x abszcisszán van (pontosan egy) pontja a vonalnak. Kilépési pontot valóban találunk $x = 3,3$ és $x = 3,4$ között – és az egyenletek szimmetriája alapján x és y felcserélésével a negyedik megoldás is kiadódik.

Így azonban csak abból mondhatjuk ki, hogy további megoldás nincs, hogy a (2)-t ábrázoló görbe monoton süllyed.