

Egy szám akkor osztható 21-gyel, ha 3-mal és 7-tel is osztható. Vizsgáljuk tehát a $2^n + 1$ ($n \geq 0$) kifejezést először a 7-tel való oszthatóság szempontjából.

Írjuk fel n -t $(3k + r)$ alakban, ahol $r = 0, 1, 2$, és az $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$ ismert azonosság felhasználásával alakítsuk át a kifejezést.

$$\begin{aligned} 2^{3k} + 1 &= (2^3)^k - 1 + 2 = 7(8^{k-1} + 8^{k-2} + \dots + 1) + 2 \\ 2^{3k+1} + 1 &= 2 \cdot 2^{3k} + 1 + 2^{3k} - 2^{3k} = 3 \cdot 2^{3k} - (2^{3k} - 1) \\ 2^{3k+2} + 1 &= 5 \cdot 2^{3k} - (2^{3k} - 1). \end{aligned}$$

Mindhárom esetben az átalakítás után kapott kifejezés egyik tagja többszöröse 7-nek, a másik nem, tehát eredeti kifejezéseink egyike sem osztható 7-tel. További vizsgálatra nincs szükség, mivel 2 bármelyik kitevője felírható az előző alakok egyikeként.

Nincs tehát egyetlen olyan kitevő sem, amelyre $2^n + 1$ osztható lenne 7-tel, s így természetesen 21-gyel sem osztható.

Szilágyi Sándor (Törökszentmiklós, Bercsényi M. Gimn. III. o. t.)