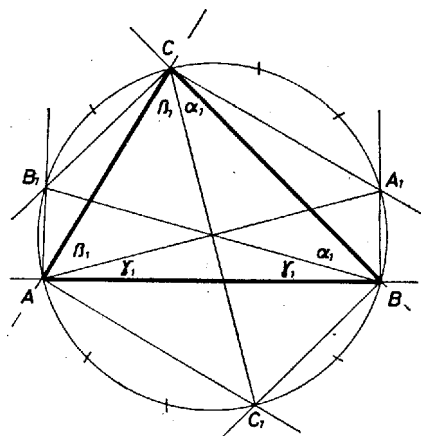


Állítsunk merőleget az AB oldalra a végpontjaiban és jelöljük az A -ban emelt merőlegesnek a körrel való metszéspontját B_1 -gyel, a B -ből kapott metszéspontot pedig A_1 -gyel (1. ábra).



1. ábra

Így a (félkörnél kisebb) AB_1 és BA_1 ívek pontjainak – és csakis ezeknek – az AB egyenesen levő vetületei esnek az AB szakasz egyik vagy másik meghosszabbítására. Thalész-tétele alapján AA_1 és BB_1 a körnek átmérői és ezért $AB_1 = BA_1$.

Ugyanezt elvégezve a BC és a CA oldal esetében is, metszéspontként a C -ből induló átmérő C_1 végpontját, valamint ismét B_1 -et, A_1 -et kapjuk, és a BC egyenesen a félkörnél kisebb, egymással egyenlő BC_1 és CB_1 ívek, a CA -n pedig a $CA_1 = AC_1$ ívek pontjai adnak a meghosszabbításra eső vetületet. Jelöljük a kapott $\widehat{AB_1}$, $\widehat{BC_1}$, $\widehat{CA_1}$ körívhez tartozó kerületi szöget rendre γ_1 -gyel, α_1 -gyel, β_1 -gyel; ezekkel és a kör sugarával kifejezhetjük egyrészt a kérdéses ívösszegeket:

$$(1) \quad \begin{aligned} \widehat{AB_1} + \widehat{BA_1} &= 2 \frac{2\pi r \gamma_1}{360^\circ} = \frac{\pi r}{45^\circ} \gamma_1, \\ \widehat{BC_1} + \widehat{CB_1} &= \frac{\pi r}{45^\circ} \alpha_1, \quad \widehat{CA_1} + \widehat{AC_1} = \frac{\pi r}{45^\circ} \beta_1, \end{aligned}$$

másrészt az ABC háromszög szögeit.

Ha az eredeti ABC háromszög hegyesszögű (1. ábra), akkor az A_1 , B_1 , C_1 pont a körből rendre a BC , CA , AB oldal által lemetszett (félkörnél kisebb) íven van és az (1)-ben felsorolt hat ív hézagatlanul és átfedés nélkül kitölti a kör kerületét. Ezért egyrészt

$$\frac{\pi r}{45^\circ} (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) = 2\pi r, \quad \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 90^\circ,$$

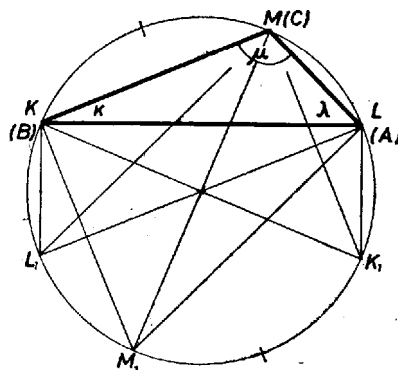
továbbá arányukra a közlés szerint

$$\gamma_1 : \alpha_1 : \beta_1 = 1 : 2 : 3,$$

amiből $\gamma_1 = 15^\circ$, $\alpha_1 = 30^\circ$, $\beta_1 = 45^\circ$, ezekből pedig háromszögünk szögei:

$$\begin{aligned} \angle BAC &= \beta_1 + \gamma_1 = 60^\circ, & \angle CBA &= \gamma_1 + \alpha_1 = 45^\circ, \\ \angle ACB &= \alpha_1 + \beta_1 = 75^\circ. \end{aligned}$$

2. Tekintsük most a kérdéses ívösszegeket egy tompaszögű KLM háromszögben, legyenek ennek szögei rendre κ , λ , μ , úgy, hogy $\mu > 90^\circ > \lambda \geq \kappa$, és állapítsuk meg a (fentiekhez hasonlóan vett) $\widehat{KL_1} + \widehat{LK_1}$, $\widehat{LM_1} + \widehat{ML_1}$ és $\widehat{MK_1} + \widehat{KM_1}$ összegek nagyságviszonyát, hogy a K , L , M csúcsokat helyesen feleltethessük meg a kívánt A , B , C csúcsoknak (2. ábra).



2. ábra

Az M csúcsot nem tartalmazó $\widehat{KL}$ ív nagyobb félkörnél, ezen pontjainak sorrendje K, L_1, M_1, K_1, L , és az egymás utáni pontok közti ívek már mind kisebbek félkörnél.

Az ívek arányához elég lesz kifejeznünk a $\widehat{KL_1}$, az $\widehat{L_1M}$ és a $\widehat{KM_1}$ ívekre néző kerületi szögeket:

$$\begin{aligned} KML_1\angle &= KML\angle - L_1ML\angle = \mu - 90^\circ, \\ L_1LM\angle &= L_1LK\angle + KLM\angle = L_1MK\angle + \lambda = (\mu - 90^\circ) + \lambda = 90^\circ - \kappa, \\ KMM_1\angle &= 90^\circ - KM_1M\angle = 90^\circ - KLM\angle = 90^\circ - \lambda. \end{aligned}$$

Mivel $\kappa \leq \lambda$, azért $L_1LM\angle \geq KMM_1\angle$, továbbá a KML_1 szög mindkettőjükénél kisebb, mert $\widehat{KL_1}$ az $\widehat{L_1M}$ -nek is, a $\widehat{KM_1}$ -nek is része. És mivel az $1 : 2 : 3$ arány tagjai különbözők, azért

$$\widehat{KL_1} : \widehat{KM_1} : \widehat{ML_1} = 1 : 2 : 3,$$

és a KL oldal szerepét AB -nek, KM -ét BC -nek és ML szerepét CA -nak kell átadnunk, azaz K, L, M szerepét rendre B -nek, A -nak, C -nek. Az arányokból egyrészt

$$\begin{aligned} 2\widehat{KL_1} &= \widehat{KM_1} = \widehat{KL_1} + \widehat{L_1M_1} = \widehat{KL_1} + \widehat{LM}, \\ \widehat{KL_1} &= \widehat{LM}, \quad \mu - 90^\circ = \kappa; \end{aligned}$$

másrészt

$$3\widehat{KL_1} = \widehat{ML_1}, \quad \widehat{MK} = 2\widehat{ML}, \quad \lambda = 2\kappa,$$

Ezeket behelyettesítve

$$\begin{aligned} \kappa + \lambda + \mu &= \kappa + 2\kappa + (90^\circ + \kappa) = 180^\circ, \\ \kappa = ABC\angle &= 22,5^\circ, \quad \lambda = BAC\angle = 45^\circ, \quad \mu = ACB\angle = 112,5^\circ \end{aligned}$$

3. Mindezek szerint a partnerünk által alapul vett ABC háromszög egymás utáni szögei vagy $60^\circ, 45^\circ, 75^\circ$, vagy $45^\circ, 22,5^\circ, 112,5^\circ$. – Mondhatjuk ezt is: az A, B, C csúcs vagy egy szabályos 12-szögnek rendre az első, a hatodik, ill. a tizedik csúcsával azonos, vagy pedig egy szabályos 8-szögnek rendre az első, a hatodik, a nyolcadik csúcsával.

Megjegyzés. Derékszögű nem lehetett az ABC háromszög, mert akkor az átfogó egyenesén nem lenne a hosszabbí-tásra eső vetületi pont, a megfelelő ív arányszám 0 lenne az adottaktól eltérően.