

a) Jelöljük a számrendszer alapszámát a -val. A 4, 4, 1 jegyekkel megadott háromjegyű szám a következőképpen írható fel:

$$A = 441 = 4a^2 + 4a + 1 = (2a + 1)^2.$$

Tehát A valóban teljes négyzet. Az $a > 4$ feltétel csak azért szükséges, hogy a számrendszer jegyei között szerepeljen a 4-es.

b) Ha A teljes köb, akkor az előző kifejezésből következik, hogy $(2a + 1)$ maga is teljes köb, azaz hogy

$$2a + 1 = n^3,$$

innen

$$a = \frac{n^3 - 1}{2}.$$

Mivel a a feltétel szerint egész, azaz $n = 2k + 1$ és $a > 4$ miatt $k = 1, 2, 3, \dots$. Így A teljes köb, ha a számrendszer alapszáma 13, 62, 171, $\dots$

c) Ha A teljes negyedik hatvány, akkor $(2a + 1)$ teljes négyzet, tehát

$$2a + 1 = n^2,$$

ebből

$$a = \frac{n^2 - 1}{2}.$$

Az előzőhöz hasonlóan n most is páratlan, $n = 2k + 1$ és $a > 4$ miatt $k = 2, 3, \dots$

Így A teljes negyedik hatvány, ha a számrendszer alapszáma 12, 24, 40, $\dots$. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzés. A feladat egyértelműen a 441 alakú számról beszél, tehát nem kellett vizsgálni a 414, illetve a 144 alakú számokat, ahol az előbbi számra nem is teljesül a feladatnak az a kikötése, hogy bármely $a > 4$ alapú számrendszerben teljes négyzet – mint ahogy több megoldó tette.