

$$(1) \quad \left[ \frac{2x-1}{3} \right] + \left[ \frac{4x+1}{6} \right] = \frac{5x-4}{3}.$$

**I. megoldás.** A megoldáshoz felhasználjuk a következő összefüggést:  $[a] = a - \{a\}$ , ahol  $\{a\}$  az  $a$  törtrészét jelenti, azaz  $0 \leq \{a\} < 1$ .

Eszerint (1) így alakul:

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{2x-1}{3} - \left\{ \frac{2x-1}{3} \right\} + \frac{4x+1}{6} - \left\{ \frac{4x+1}{6} \right\} &= \frac{5x-4}{3}, \\ \left\{ \frac{2x-1}{3} \right\} + \left\{ \frac{4x+1}{6} \right\} &= \frac{7-2x}{6}. \end{aligned}$$

Mivel  $0 \leq \{a\} < 1$ , a (2) bal oldalán álló összeg 0 és 2 közé esik, így

$$0 \leq \frac{7-2x}{6} < 2$$

is fennáll, ebből

$$-2,5 < x \leq 3,5.$$

A kapott  $x$  értéket (1) jobb oldalába helyettesítve:

$$(3) \quad -5,5 < \frac{5x-4}{3} < 4,5.$$

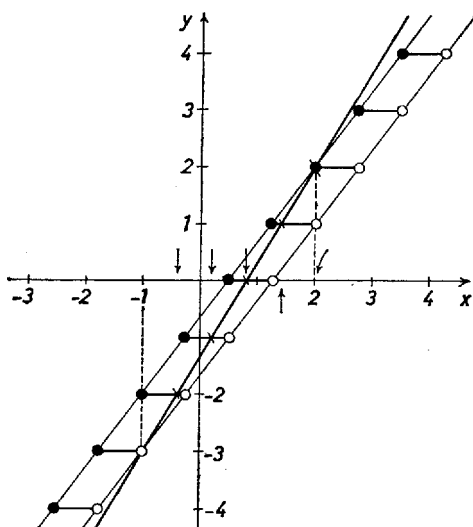
Mivel az (1) bal oldalán álló kifejezések mindegyike egész, ezért összegük is egész, azaz  $\frac{5x-4}{3} = N$  egész. (3)-ból  $N$  értéke  $-5,5$  és  $4,5$  közé eső érték lehet. Írjuk fel táblázatban  $N$  szóba jövő értékeit, számítsuk ki a hozzájuk tartozó  $x = \frac{3N+4}{5}$  értékeket, helyettesítsük ezeket az (1) bal oldalán álló kifejezésekbe. Összegüket egybevetve  $N$ -nel [ami (1) jobb oldalának megfelelő értéke] mindjárt kiolvashatjuk a táblázatból, hogy mikor áll fenn egyenlőség.

| $N$                             | -5   | -4   | -3 | -2   | -1  | 0   | 1   | 2 | 3   | 4   |
|---------------------------------|------|------|----|------|-----|-----|-----|---|-----|-----|
| $x$                             | -2,2 | -1,6 | -1 | -0,4 | 0,2 | 0,8 | 1,4 | 2 | 2,6 | 3,2 |
| $\left[ \frac{2x-1}{3} \right]$ | -2   | -2   | -1 | -1   | -1  | 0   | 0   | 1 | 1   | 1   |
| $\left[ \frac{4x+1}{6} \right]$ | -2   | -1   | -1 | -1   | 0   | 0   | 1   | 1 | 1   | 2   |

Tehát az egyenlőség  $x = -0,4; 0,2; 0,8; 1,4; 2,0$ ; értékekre teljesül.

Telek József (Budapest, Berzsenyi D. Gimn. II. o. t.)

**II. megoldás.** Ábrázoljuk a  $\left[ \frac{2x-1}{3} \right] + \left[ \frac{4x+1}{6} \right]$  és az  $\frac{5x-4}{3}$  függvényeket.



Az egészrész függvény grafikonja az  $x$  tengellyel párhuzamos szakaszokból áll. Mindig egész  $y$  értéket vesz fel. A szakasz jobb oldali végpontja hozzátartozik a függvényhez, a bal oldali nem.

A grafikonról leolvashatjuk, hogy a két függvénynek közös pontja van az  $y = 2$ ,  $y = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y = -1$ ,  $y = -2$  függvények egy-egy szakaszán. A hozzájuk tartozó  $x$  értékeket pontosan meghatározhatjuk.

Ha  $\frac{5x-4}{3} = 2$ , akkor  $x = 2$ , és így tovább  $x$ -re a következő értékeket kapjuk:  $x = 2, \frac{7}{5}; \frac{4}{5}; \frac{1}{5}; -\frac{2}{5}$ .

*Megjegyzés.* Hasonló típusú egyenletek megoldásánál a grafikonról leolvashatjuk, hogy a megoldások száma attól függ, hányszor metszi át az adott egyenes az egészrész függvényt ábrázoló szakaszokat. A szakaszok végpontjai két párhuzamos egyenesen helyezkednek el. Nincs megoldás, ha az egyenletben megadott egyenes mindenütt a két párhuzamos közti sávon kívül halad. Végtelen sok megoldás van, ha az egyenes a sávon belül halad, nem párhuzamos az  $x$  tengellyel, vagy egybeesik valamelyik szakasszal.

**III. Megoldás.** Tekintsük új ismeretlennek az első szögletes zárójelben álló kifejezést:

$$(4) \quad y = \frac{2x-1}{3},$$

erre az ismeretlenre (1) a

$$(5) \quad [y] + \left[ y + \frac{1}{2} \right] = \frac{5y-1}{2}$$

egyenletet jelenti. A bal oldalon álló szám  $n \leq y < n + \frac{1}{2}$  mellett (ahol  $n$  egész szám)  $2n$ -nel,  $n + \frac{1}{2} \leq y < (n+1)$  mellett  $(2n+1)$ -gyel egyenlő. Mindkét esetben egyenlő a bal oldal  $[2y]$ -vel, (5) tehát ekvivalens a

$$(6) \quad [2y] = \frac{5y-1}{2}$$

egyenlettel. Ebből némi átalakítással a

$$2y - [2y] = \frac{1-y}{2}$$

egyenletet kapjuk. Itt a bal oldal értéke 0 és 1 közötti szám (0 lehet, de 1 nem), tehát a jobb oldalon álló kifejezés értéke is ilyen:

$$0 \leq \frac{1-y}{2} < 1, \\ -1 < y \leq 1.$$

Eszerint (6) bal oldalának lehetséges értékei:  $[2y] = -2, -1, 0, 1, 2$ , amiből (6), majd (4) alapján rendre

$$\begin{array}{ccccc} y = -\frac{3}{5}; & -\frac{1}{5}; & \frac{1}{5}; & \frac{3}{5}; & 1, \\ x = -\frac{2}{5}; & \frac{1}{5}; & \frac{4}{5}; & \frac{7}{5}; & 2 \end{array}$$

adódik. Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy ezek mindegyike gyöke (1)-nek.