

A háromszög egymás utáni szögei a feltételeknek megfelelően egy-egy x , y , z természetes számnak rendre a 7-szerese, 9-szerese, 11-szerese úgy, hogy

$$(1) \quad 7x + 9y + 11z = 180.$$

Mivel e szögek mindegyike hegyesszög, kisebb 90° -nál, teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$(2) \quad 1 \leq x \leq 12, \quad 1 \leq y \leq 9, \quad 1 \leq z \leq 8.$$

Átrendezve (1)-et:

$$(3) \quad 9(x + y + z) = 180 + 2(x - z).$$

Ennek az egyenletnek a bal oldala osztható 9-cel, ezért a jobb oldalon $(x - z)$ is osztható vele, ami csak akkor teljesül a (2) feltételek miatt, ha $x - z = 0$, vagy ha $x - z = 9$. Ezt a két lehetőséget külön vizsgáljuk.

a) Ha $x - z = 0$, akkor $z = x$, és így (2) miatt $x \leq 8$, másrészt (3)-ból és ismét (2) miatt

$$y = 20 - 2x \leq 9, \quad x \geq 6.$$

Így a következő három lehetőség adódik:

$$\begin{array}{lll} x = z = 6, & 7, & 8, \\ y = 8, & 6, & 4, \end{array}$$

a megfelelő szögértékek:

$$\begin{array}{lll} 7x = 56, & 49, & 42, \\ 9y = 36, & 54, & 72, \\ 11z = 88, & 77, & 66. \end{array}$$

Innen tehát 3 megoldást kaptunk.

b) Ha pedig $x - z = 9$, akkor $z = x - 9$, a (3), majd (2) alapján $2x + y = 31$ és $x \geq 11$, az ennek megfelelő értékhármasok:

$$\begin{array}{ll} x = 12, & 11 \\ z = x - 9 = 3, & 2, \\ \text{és ekkor } y = 7, & 9, \end{array}$$

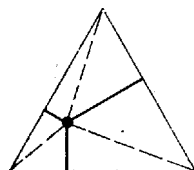
és a lehetséges szögértékek:

$$\begin{array}{lll} 7x = 84, & \text{ill.} & 77 \\ 9y = 63, & \text{ill.} & 81 \text{ és} \\ 11z = 33, & \text{ill.} & 22. \end{array}$$

Mindezek szerint a feltételnek 5 háromszög tesz eleget, s ezek szögei:

$$\begin{array}{lllll} \alpha = 42^\circ, & 49^\circ, & 56^\circ, & 77^\circ, & 84^\circ, \\ \beta = 72^\circ, & 54^\circ, & 36^\circ, & 81^\circ, & 63^\circ, \\ \gamma = 66^\circ, & 77^\circ, & 88^\circ, & 22^\circ, & 33^\circ, \end{array}$$

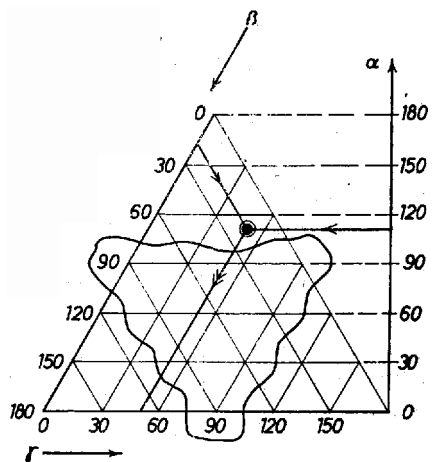
Megjegyzések. Bemutatjuk a feladatnak egyféle grafikus próbálkozáson alapuló megoldását. Felhasználjuk az egyenlő oldalú háromszögnek azt a tulajdonságát, hogy bármely belső vagy kerületi pontjára nézve a három oldaltól mért távolságok összege állandó, egyenlő a háromszög magasságával (1. ábra, bizonyítását az olvasóra hagyjuk).



1. ábra

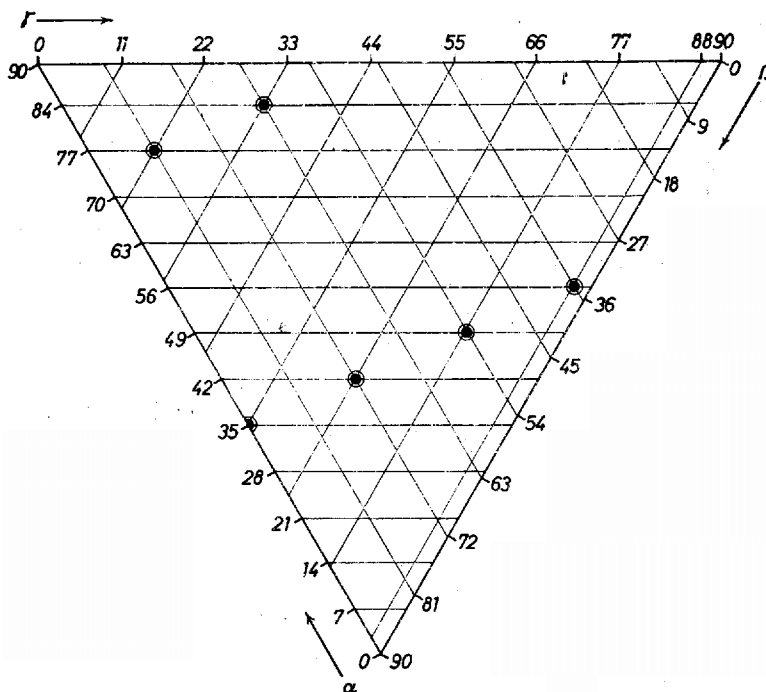
Ennek megfordításával ugyanis minden olyan x, y, z nemnegatív számhármashoz, melyben $x+y+z = s$, állandó, az s magasságú egyenlő oldalú háromszögben egyértelműen hozzárendelhető egy pont, pontosabban akkor, ha még azt is előírjuk, hogy az x, y, z távolságot a háromszögnek rendre melyik oldalától mérjük.

A gyakorlat céljára ennek alapján úgynevezett „számoló” (számítást pótló) ábrát lehet szerkeszteni úgy, hogy a háromszögben már előre mindegyik oldalegyenestől $1, 2, \dots$, (vagy $10, 20, \dots$) egységnyi távolságban párhuzamosakat húzunk. Ezután – föltéve, hogy ismerjük x és y értékét – megkeressük azt a pontot, ahol az első oldaltól x , és a második oldaltól y távolságban húzott egyenes metszi egymást, és leolvassuk a harmadik oldallal párhuzamos egyenesek skálaértékei alapján a pontnak a harmadik oldaltól való távolságát, ez az adott x -et és y -t s -re kiegészítő z érték. x -et és y -t a grafikonba bevinni, illetőleg z -t onnan kiolvasni, bizonyos pontossággal lehet az ábra nagyságának és a hálózat sűrűségének megfelelően, mint bármely grafikonban. A 2. ábrán $s = 180^\circ$ és a megjelölt pontban az $\alpha = 110^\circ$, $\beta = 20^\circ$ értékpárhoz $\gamma = 50^\circ$ adódik. – Az ilyen ábrákat *háromszög nomogramnak* nevezik. A skálákat a háromszög oldalaira is lehet fölírni.



2. ábra

Rátérve feladatunkra, mivel háromszögünk szögei hegyesszögek, elég megtartani a 2. ábrából a középháromszöget (hullámosan körülkerítve), és ennek magasságát 90 egységnek, foknak megfeleltetni. Az így szerkesztett 3. ábrán az egyik oldallal párhuzamosan csak azokat az egyeneseket húzzuk meg, amelyek a csonkítatlan háromszög oldalegyeneseitől akkora távolságban vannak, mint az új háromszög magasságának $\frac{7}{90}, \frac{14}{90}, \dots, \frac{84}{90}$ része, a másik oldaltól $\frac{9}{90}, \frac{18}{90}, \dots, \frac{81}{90}$ része és a harmadiktól $\frac{11}{90}, \frac{22}{90}, \dots, \frac{88}{90}$ része.



3. ábra

Továbbá megkeressük az olyan pontokat – ha vannak –, amelyeken 3 berajzolt egyenes megy át, és kellő ellenőrzés után ezek a feladat megoldásai.

Az érdeklődő olvasónak figyelmébe ajánljuk az így talált 5 pont (és a kerületen levő, derékszögű háromszöget jelentő pont) kölcsönös helyzetében mutatkozó szabályszerűség kimondását, valamint felhasználását a három oszthatósági feltételt kielégítő *tompaszögű* megoldások kiolvasására.