

I. megoldás. A 2^n hatvány végződése $n > 3$ esetén rendre 6, 2, 4, 8, 6, 2, Ehhez belátjuk, hogy 2^{n+4} minden n -re ugyanarra a jegyre végződik, mint 2^n :

$$2^{n+4} = 2^n \cdot 2^4 = 2^n \cdot 16.$$

A szorzat utolsó jegye a tényezők utolsó jegyétől függ csak. A 2^n utolsó jegye mindig páros, s ha a 0, 2, 4, 6, 8 számokat 6-tal szorozzuk, a szorzat ugyanarra a számjegyre végződik, mint maga a szám. Ezzel állításunkat igazoltuk.

Ha $n = 4k$, akkor 2^n utolsó jegye 6, tehát a feladat állítása helyes.

Ha $n = 4k + i$ ($i = 1, 2, 3$) alakú, 2^n utolsó jegye 2^i , tehát a feladat állítása azt jelenti, hogy

$$\frac{2^i(2^n - 2^i)}{10} \quad (i = 1, 2, 3)$$

osztható 6-tal.

Elég belátni, hogy $2^n - 2^i$ többszöröse 3-nak, hiszen már tudjuk, hogy

$$\frac{2^n - 2^i}{10}$$

egész szám.

$$2^n - 2^i = 2^{4k+i} - 2^i = 2^i(2^{4k} - 1) = 2^i((2^4)^k - 1),$$

s mivel $(a^n - b^n)$ mindig osztható az alapok különbségével, $(2^4)^k - 1$ mindig osztható 15-tel. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

II. megoldás. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy ha k tetszőleges természetes szám, akkor $2^{4k} = 10A + 6$, ahol A -t 3-mal osztva 1-et kapunk maradékul, és $2^{4k+1} = 10B + 2$, $2^{4k+2} = 10C + 4$, $2^{4k+3} = 10D + 8$, ahol B, C, D osztható 3-mal. Könnyen látható, hogy a feladat állítása ebből már következik. Ha $k = 1$,

$$2^{4k} = 16, \quad 2^{4k+1} = 32, \quad 2^{4k+2} = 64, \quad 2^{4k+3} = 128,$$

tehát állításaink helyesek. Tegyük fel, hogy már beláttuk azokat valamilyen természetes k -ra, és legyen $m = k + 1$. Akkor

$$2^{4m} = 2 \cdot 2^{4k+3} = 2(10D + 8) = 10(2D + 1) + 6,$$

ahol D a már bizonyított állítás szerint osztható 3-mal. Ez viszont épp azt jelenti, hogy $2^{4m} = 10A_1 + 6$ alakú, ahol A_1 -et 3-mal osztva 1-et kapunk maradékul. Továbbmenve kapjuk, hogy

$$2^{4m+1} = 2 \cdot 2^{4m} = 2(10A_1 + 6) = 10 \cdot (2A_1 + 1) + 2,$$

tehát $2^{4m+1} = 10B_1 + 2$, ahol B_1 osztható 3-mal, hiszen $2A_1$ -et 3-mal osztva már 2-t kapunk maradékul. Ennek alapján

$$2^{4m+2} = 2 \cdot 2^{4m+1} = 2(10B_1 + 2) = 10C_1 + 4,$$

ahol $C_1 = 2B_1$, tehát C_1 is osztható 3-mal, és

$$2^{4m+3} = 2 \cdot 2^{4m+2} = 2(10C_1 + 4) = 10D_1 + 8,$$

ahol $D_1 = 2C_1$, tehát D_1 is osztható 3-mal. Záródott a kör, összes állításunkat beláttuk m -re, és ezzel egyben minden természetes számra is beláttuk azt.