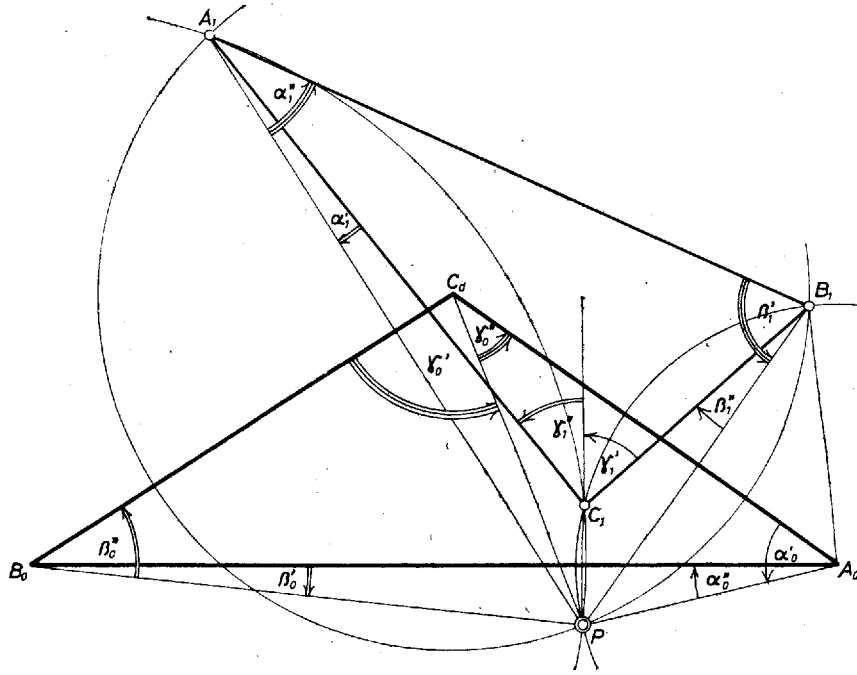


Módosítsuk a képezési utasítást úgy, hogy P -t vetítés helyett tükrözzük a megfelelő oldalra. Így kétszer akkora háromszöget kapunk, mint eredetileg, s mivel az eredeti transzformáció és e módosítottja hasonló háromszögre vezet, azért elegendő lesz a feladat állítását a módosított transzformációra bizonyítani.

Jelöljük a $C_n A_n$ egyenest a PA_n egyenesbe vivő forgatást α'_n -vel, a PA_n -et $B_n A_n$ -be vivőt α''_n -vel, és tovább az $A_n B_n P$, $P B_n C_n$, $B_n C_n P$ és $PC_n A_n$ forgásszöget rendre β'_n -vel, β''_n -vel, γ'_n -vel, γ''_n -vel.



1. ábra

Megmutatjuk, hogy a H_{n+1} -beli megfelelő forgásszögekre fennállanak a következő egyenlőségek

$$(1) \quad \begin{aligned} \alpha'_{n+1} &= \beta'_n, & \beta'_{n+1} &= \gamma'_n, & \gamma'_{n+1} &= \alpha'_n, \\ \alpha''_{n+1} &= \gamma''_n, & \beta''_{n+1} &= \alpha''_n, & \gamma''_{n+1} &= \beta''_n, \end{aligned}$$

Ezekből következik majd, hogy

$$\alpha'_3 = \beta'_2 = \gamma'_1 = \alpha'_0, \quad \beta'_3 = \gamma'_2 = \alpha'_1 = \beta'_0, \quad \gamma'_3 = \alpha'_2 = \beta'_1 = \gamma'_0,$$

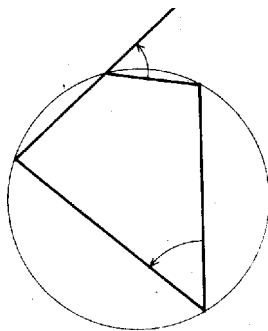
és hasonlóan

$$\alpha''_3 = \alpha''_0, \quad \beta''_3 = \beta''_0, \quad \gamma''_3 = \gamma''_0,$$

tehát H_3 és H_0 megfelelő szögei egyenlők, így valóban hasonlóak.

Tekintsük az A_n , B_n , C_n pontok köré írt, P -n átmenő köröket (1. ábra). E körök rendre átmennek P -nek a körpárok centrálisaira vonatkozó tükröképein, a H_{n+1} háromszög megfelelő csúcsain. A tükrözés miatt a $B_{n+1} A_n$ -et $A_n P$ -be vivő forgatás egyenlő $2\alpha'_n$ -vel. Emiatt egyenlők α'_n -vel az A_n körüli, P -n átmenő körnek a $B_{n+1} P$ ív feletti kerületi szögei, köztük a $C_{n+1} B_{n+1}$ -et PC_{n+1} -be vivő forgatás is, vagyis $\gamma'_{n+1} = \alpha'_n$; hasonlóan láthatjuk be (1) többi állításait is.

Meg kell azonban jegyeznünk, hogy két egyenes forgásszöge nincs egyértelműen meghatározva: ha a φ szögű forgatás e -t f -be viszi, akkor ugyanezt teszi a $(180^\circ - \varphi)$ szögű forgatás is; emiatt a fenti bizonyítás kiegészítésre szorul. A bizonyított (1) egyenlőségek úgy igazak, hogy a lehetséges választások közt van olyan is, amelyekre teljesül (1). Így igaz a kerületi szögek egyenlőségére felhasznált állítás is. A szokásos értelmezés mellett ugyanis meg kell különböztetni azt az esetet, amikor a kerületi szög csúcsa a meghatározó íven van, attól, amikor a csúcs a kiegészítő íven van. Ez elkerülhető a forgásszögek alkalmazásával: a 2. ábrán látható kerületi forgásszögek egyenlők, noha csúcsaik egymást (teljes körre) kiegészítő íveken vannak.



2. ábra

Ennek az egyöntetűségnek azonban ára van: (1) felhasználásával csak azt bizonyítjuk be, hogy H_3 és H_0 megfelelően választott forgásszögei egyenlők, azaz ha a szögeket (a közöséges értelemben vett szögeket, nem forgásszögeket) rendre $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ jelöli, akkor az $\alpha_0, \alpha_3; \beta_0, \beta_3; \gamma_0, \gamma_3$ párok tagjai vagy egyenlők vagy 180° -ra egészítik ki egymást.

A fellépő bizonytalanság, eloszlatásának az érdekében csak azt kell felhasználnunk, hogy a háromszög szögeinek összege 180° . Ha ugyanis a megfelelő szögek között volna egy, amelyik 180° -ra egészítené ki a párját – mondjuk $\alpha_3 = 180^\circ - \alpha_0$ volna, akkor H_3 -ban a szögek összege nem lehetne 180° :

$$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = (180^\circ - \alpha_0) + \beta_0 + \gamma_0 = 360^\circ - 2\alpha_0,$$

ami csak úgy lehet 180° , ha $\alpha_0 = 90^\circ$, azaz ha α_3 egyenlő α_0 -lal is. Ha két ilyen pár volna: $\alpha_3 = 180^\circ - \alpha_0$ és $\beta_3 = 180^\circ - \beta_0$, akkor

$$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = (180^\circ - \alpha_0) + (180^\circ - \beta_0) + \gamma_0 = 180^\circ + 2\gamma_0,$$

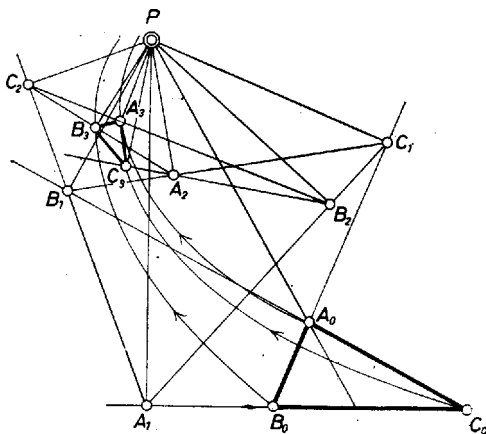
ami nem lehet 180° -kal egyenlő; ha pedig három ilyen volna, akkor:

$$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = (180^\circ - \alpha_0) + (180^\circ - \beta_0) + (180^\circ - \gamma_0) = 360^\circ,$$

ami ismét nem 180° . Az állítást ezzel bebizonyítottuk.

Megjegyzés. A legutóbbiakban egy kicsit többet is bizonyítottunk: mivel a forgásszögek is egyenlők, azért azt is beláttuk, hogy H_3 körüljárása megegyezik H_0 körüljárásával.

Ilyenkor mindig van olyan forgatva nyújtás (kicsinyítés), amely H_0 -t átviszi H_3 -ba (a szög lehet természetesen 180° is), itt azonban még azt is be lehet látni, hogy ennek a transzformációnak a centruma éppen a P pont, vagyis hogy a P, A_0, B_0, C_0 és a P, A_3, B_3, C_3 pontrendszerek is hasonlóak.



3. ábra

(Ilyet mutat az eredeti képezésmód mellett a 3. ábra; a sejtéshez eljuttat néhány pontosan végrehajtott szerkesztés más-más kiindulási helyzetből, a bizonyításra itt nem térünk ki.)