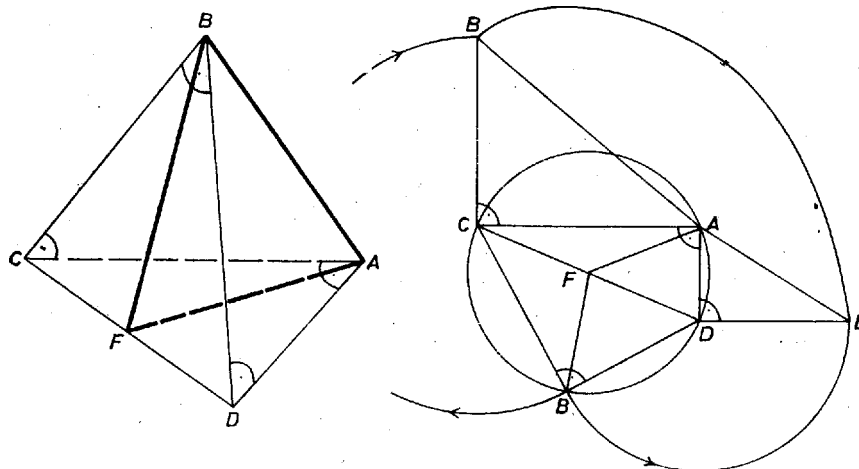


I. megoldás. Tegyük fel a feladat állításával ellentétben, hogy van olyan tetraéder, amelyben minden csúcsnál van derékszög.

Legyen $ABCD$ egy ilyen tetraéder, és válasszuk a betűzést úgy, hogy AB legyen az (egyik) leghosszabb él. E választás miatt az ABC , ABD háromszögekben AB -vel szemben van a legnagyobb szög, tehát a C -nél levő élszögek közül az ABC háromszögbeli szög a derékszög, a D -nél levők közül pedig az ABD -beli. (Minden háromszögben csak egy derékszög lehet.) Így ezeknek a háromszögeknek A -nál hegyesszögük van, az A -nál levő derékszög csak az ACD háromszögben lehet. Ugyanígy kapjuk, hogy a B -nél levő derékszög a BCD háromszögnek szöge.



1. ábra

Jelöljük a CD szakasz felezőpontját F -fel. Thalész tétele szerint az AF , BF szakaszok egyenlők a CD átfogó felével. Mivel az AB , CD egyeneseknek nincs közös pontjuk, az A , B , F pontok valódi háromszöget határoznak meg, és ebben

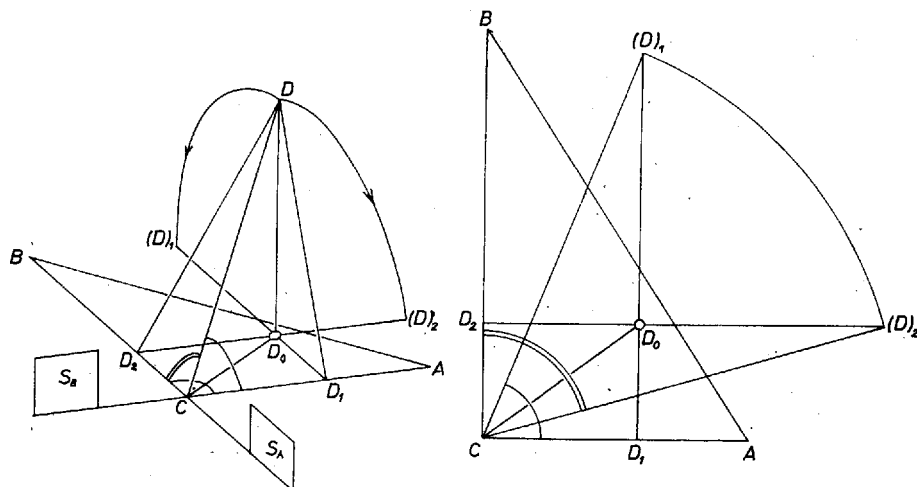
$$AB < AF + FB = \frac{1}{2}CD + \frac{1}{2}CD = CD$$

(az 1. ábra a gondolt gúlát és kiterítését vázolja). Ellentmondásra jutottunk, hiszen betűzésünk szerint a tetraédernek nincs AB -nél hosszabb éle. – Feladatunk állítását ezzel bebizonyítottuk.

II. megoldás.

Tegyük ismét fel, hogy $ABCD$ olyan tetraéder, amelyben minden lap derékszögű és minden csúcsnál van derékszög. Egyelőre csak a C -ben összefutó élek közti szögeket tekintjük, válasszuk úgy a betűzést, hogy C -ben az ACB szög legyen 90° -os. Mivel minden lap derékszögű háromszög, a tetraéder lapjain nincsenek tompaszögek. Emiatt a C -nél levő ACD és BCD szögek hegyesszögek, a D csúcs a C -ben CA -ra emelt merőleges S_A síknak A -t tartalmazó oldalán, és a C -ben a CB -re emelt merőleges S_B síknak B -t tartalmazó oldalán van. Ezek szerint D -nek az ABC síkon levő D_0 a vetülete benne van ACB szögtartományban.

Vetítsük D_0 -t az AC , BC egyenesekre és jelöljük a vetületet rendre D_1 -gyel, D_2 -vel. A $D_0D_1CD_2$ négyszögben három 90° -os szög van, ez tehát téglalap (2. ábra).



2. ábra

A CD_1D_0 és CD_1D háromszögek derékszögűek, bennük CD_1 közös és $DD_1 > D_0D_1$. Emiatt $DCD_1\angle > D_0CD_1\angle$. Hasonlóan kapjuk, hogy $DCD_2\angle > D_0CD_2\angle$, és e kettő összege szerint $ACD\angle + BCD\angle = D_1CD\angle + D_2CD\angle > D_1CD_0\angle + D_2CD_0\angle = 90^\circ$, tehát a C -nél levő hegyesszögek összege nagyobb 90° -nál.

Amit C -re kaptunk, érvényes a tetraéder további három csúcsára is, a bennük találkozó hegyesszögek összege is több 90° -nál. Így viszont a négy lapon levő 8 hegyesszög összege 360° -nál több volna, ami nem lehet, hiszen egy-egy lapon az összegük 90° .

A kívánt tetraéder tehát nem létezik.