

I. megoldás. A felírt két egyenletből látjuk, hogy mindkét háromjegyű szám négyzete hatjegyű, tehát A -nak és C -nek mint az alapok elől álló jegyének értéke legalább 3. A feltétel szerint különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek, és A -nak és C -nek mint az alapok utolsó jegyének négyzete B -re, ill. F -re végződik, tehát sem A , sem C nem lehet 5 vagy 6. Eszerint A és C lehetséges értékei

$$(3) \quad 3, 4, 7, 8, 9,$$

négyzetüknek a végződéseire rendre

$$(4) \quad 9, 6, 9, 4, 1,$$

a B és F szóbjövő értékeit ezek adják.

Négyzetszám utolsó két jegyét nem befolyásolja az alapban a százask helyén álló számjegy, ezért az első egyenletben BC és FB közti összefüggést vizsgálhatjuk anélkül, hogy A értékét ismernénk.

Az első egyenletből látjuk, hogy B értékét C négyzetének utolsó jegye adja, ha pl. $C = 7$, akkor $B = 9$, $BC = 97$. FB értékét négyzetre emeléssel kiszámíthatjuk: $FB = 09$; ekkor $BF = 90$, ami a második egyenlet szerint BA négyzetének kétjegyű végződése. Ámde 90-re végződő négyzetszám nincs, ez nem lehet megoldása a feladatnak.

Vegyük sorra BC szóbjövő értékeit. Ezek (3) és (4) alapján 93, 64, 97 (ezt már megvizsgáltuk), 48, 19. Négyzeteiknek végződése: 49, 96, 09, 04, 61. A fordított sorrendben felírt 94, 69, 40 és 16 közül a 94 és 40 nem négyzetvégződés, mert ha egy négyzetszám utolsó jegye 0, akkor előtte is 0 áll, ha viszont az utolsó jegye 4-es, akkor előtte páros számjegy áll. A fennmaradt két esetben $BF = 69$ vagy $BF = 16$.

Ha $BF = 69$, akkor $A = 3$ vagy $A = 7$, és így az első esetben

$$\begin{aligned} ABC &= 364, & ABC^2 &= 132\,496, \\ CBA &= 463, & CBA^2 &= 214\,369, \end{aligned}$$

eleget is tesznek a feltételeknek.

Ha pedig $A = 7$, akkor $ABC = 764$, $CBA = 467$. Az első egyenletből BC^2 utolsó két jegye $FB = 96$, $B = 6$, a második egyenletből BA^2 utolsó két jegye $BE = 89$, $B = 8$. Ez B -re ellentmondás.

A másik szóbjött esetben $ABC = 419$, $CBA = 914$. Az előbbihez hasonlóan BA^2 utolsó két jegye $BF = 96$, és BC^2 utolsó két számjegye $FB = 61$, ami B -re ismét ellentmondás.

Összefoglalva, a feladatnak csak egy megoldása van, mint láttuk: $A = 3$, $B = 6$, $C = 4$, $D = 1$, $E = 2$ és $F = 9$.

II. megoldás. A két négyzet kétjegyű végződése egymás megfordítottja. Ennek alapján leszűkíthetjük a vizsgálandó végzések számát. E célra megmutatjuk, hogy az egymás utáni négyzetszámok kétjegyű végzésekben 25^2 végződése után nem találunk újat, az eddigiek fordított sorrendben ismétlődnek, 50^2 után pedig az 1^2 és 50^2 közöttiek szakaszosan ismétlődnek.

Valóban, ha x egész szám és $0 \leq x \leq 25$, akkor $50 \geq 50 - x \geq 25$, és $(50 - x)^2$ kétjegyű végződése egyezik x^2 kétjegyű végződésével, mert különbségük:

$$(50 - x)^2 - x^2 = 50(50 - 2x) = 100(25 - x),$$

másrészt

$$(50 + x)^2 - x^2 = 50(50 + 2x) = 100(25 + x),$$

mindkettő osztható 100-zal és ez igazolja állításainkat.

A 25^2 -ig előfordult 22-féle végződés közül a két különböző számjegyből alakuló, megfordítható végzések 16 és 61, valamint 69 és 96. Ezek először rendre 4 és 19, ill. 13 és 14 négyzetében lépnek föl, így az előzők szerint

$$(5) \quad \begin{aligned} &\dots 16 - \text{ra végződik a } \dots 04, \dots 46, \dots 54, \dots 96 \text{ számok négyzete,} \\ &\dots 61 - \text{re végződik a } \dots 19, \dots 31, \dots 69, \dots 81 \text{ számok négyzete,} \\ &\dots 69 - \text{re végződik a } \dots 13, \dots 37, \dots 63, \dots 87 \text{ számok négyzete,} \\ &\dots 96 - \text{ra végződik a } \dots 14, \dots 36, \dots 64, \dots 86 \text{ számok négyzete.} \end{aligned}$$

Az alapokra így talált végzések közül többet mellőzhetünk a következő két észrevétel alapján. (1) és (2) mindegyikében az alapszám végződése más, mint a négyzetéé, az alapszám tízes értékű jegye megismétlődik a négyzetének kétjegyű végződésében, mégpedig (1) esetében a végződés 2. jegyében, (2) esetében a végződés 1. jegyében.

(5)-ben kiemelten vastag számjegyekkel írtuk az alapvégzések közül ezeknek megfelelőket, a közönséges számjegyekkel szedettek nem adhatnak megoldást. És mivel a $\dots 16$ -os négyzetvégződés így lehetetlenné vált, elmarad a $\dots 61$ -es végződés is, tehát – ha egyáltalán van megoldás – az csak az alábbiak kiegészítése lehet:

$$\begin{aligned} (1)\text{-ből: } &\dots 64^2 = \dots 96, \\ (2)\text{-ből: } &\dots 63^2 = \dots 69, \end{aligned}$$

tehát $B = 6$, $C = 4$, $A = 3$, $F = 9$, így a két alapszám 364, illetve 463.

Négyzetük rendre: 132 496, 214 369, megfelel a hátralevő számjegyekre tett követelményeknek is, $D = 1$, $E = 2$. A megoldást befejeztük.