

I. megoldás. a) Ha el tudnánk helyezni hat egész számot egy tetraéder élein úgy, hogy a lapokon az összegük ugyanaz az S szám legyen, akkor a hat szám összege páros. Valóban, a lapokon kapott összegek összege egyrészt $4S$, másrészt egyenlő az élekre írt hat szám összegének a kétszeresével, hiszen minden él két lapon szerepel. Tehát a számok összege $2S$, ahol S egész. Az első hat természetes szám összege azonban páratlan, emiatt ezeket nem lehet felírni a tetraéder éleire úgy, hogy a lapokon ugyanazt az összeget kapjuk.

b) Jelöljük a tetraéder csúcsaiba írt négy szám összegét C -vel, a felezőpontokba írt hat szám összegét F -fel, a lapok 6–6 számának összegét S -sel.

A négy lap összegében a csúcsok számai háromszor és a felezőpontok számai kétszer fordulnak elő, más szóval: mindegyik számunk 2-szer és C tagjai még egyszer. Az adott számok összege $C + F = 55$, innen

$$4S = 110 + C.$$

Az egyenletből azt is leolvashatjuk; hogy C páros, de nem osztható 4-gyel. C legkisebb értékeként $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, legnagyobb értékeként $10 + 9 + 8 + 7 = 34$ jön szóba, ennek megfelelően S legkisebb értéke 30, legnagyobb értéke 36.

Az adott 10 szám közül a tetraéder mindegyik lapja négyet–négyet nem tartalmaz. Nevezzük az ilyen számnégyeseket a szemben levő csúcs környezetének, összegüket „csúcskörnyéki” összeg-nek. Nyilván a négy csúcskörnyéki összeg is egyenlő egymással, jelöljük ezt K -val, így $K = 55 - S$ és mivel az előző egyenletből

$$S = \frac{110 + C}{4}, \quad \text{azért} \quad K = \frac{110 - C}{4}.$$

Ezek alapján felírjuk C , S és K lehetséges értékrendszeit:

C	10	14	18	22	26	30	34
S	30	31	32	33	34	35	36
K	25	24	23	22	21	20	19

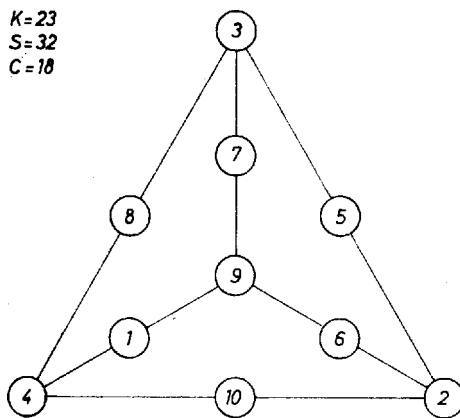
Próbáljunk olyan elrendezést keresni, melyben $K = 23$. Vegyük 23-nak az adott számok közül a következő négyesből való előállítását a tetraéder felső csúcsának környezete céljára

I. $1+6+7+9$.

Ekkor az alapon levő 3 csúcs környezete céljára 23 további felbontásai közül csak azok jönnek szóba, amelyeknek az I.-vel pontosan egy közös számuk van az egyes alapcsúcsokba lefutó oldalél felezőpontja céljára. Ezek a következők (a közös számot vastag számjeggyel szedtük):

II. $1+4+8+10$; **III.** $6+2+5+10$; **VI.** $7+2+4+10$; **VIII.** $9+2+4+8$.
IV. $6+3+4+10$; **VII.** $7+3+5+8$;
V. $6+4+5+8$;

Ugyanígy a további három csúcskörnyéki számnégyesnek is páronként egy közös elemüknek kell lennie. Ennek a II.-kal együtt eleget tesz a III. és a VII. a 10-es, ill. 8-as számmal, és ez a két négyes együtt is megfelel, egyetlen közös elemük az 5. Az így adódó elrendezésnek a tetraéder alapsíkjára való merőleges vetületét az 1. ábra mutatja.



1. ábra

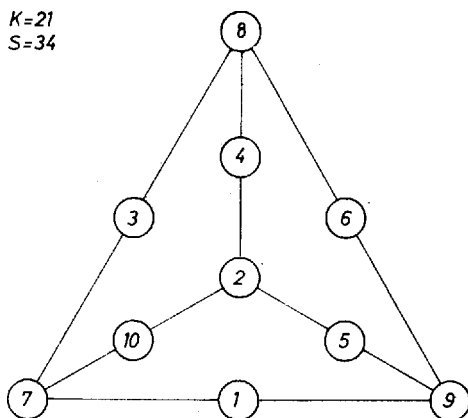
A csúcsokba az a száma maradt a számnégyeseknek, amelyik nem közös semelyik másik négyessel sem.

Előkészítésünkéből hasonlóan kapunk két további megoldást: a II. számnégyest a VIII.-kal pótolva, majd abból, a III-at a IV.-kel pótolva.

II. megoldás. a feladat a) részéhez. Vegyünk egy kitérő élpárt: közülük bármelyiknek a kétszereséhez adjuk is hozzá a másik négy élhez rendelt számok összegét, így két lap számainak összegét, tehát ugyanazt a számot kapjuk. Emiatt a kitérő élekhez rendelt számoknak egyenlőeknek kell lenniük, nem teljesíthető tehát a feladat követelménye.

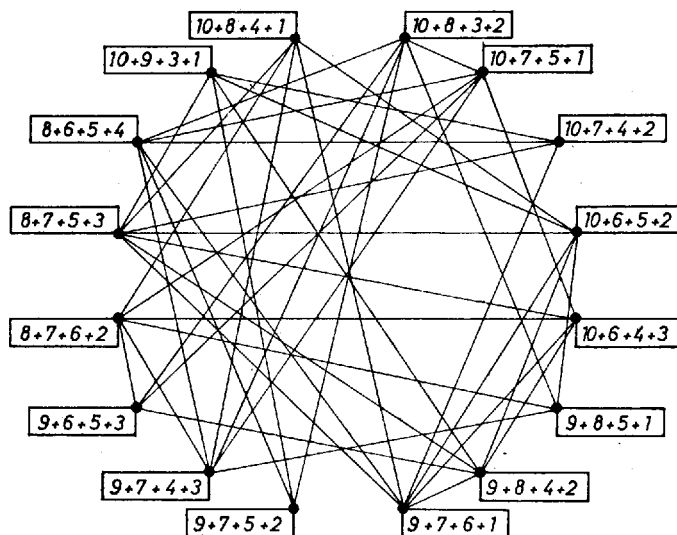
Megjegyzések. 1. A *b)* rész minden megoldásához van egy komplementer megoldás is, ezt úgy kapjuk, hogy mindegyik szám helyébe az öt 11-re kiegészítő számot írjuk. Nyilvánvaló, hogy ezáltal a csúcskörnyéki összegek, ill. lapösszegek ismét egyenlők lesznek, pl.

$K = 23$, $S = 32$, $C = 18$ komplementerjében $K' = 44 - K = 21$, $S' = 66 - S = 34$, $C' = 44 - 18 = 26$. Az 1. ábra ilyen párja a 2. ábra elrendezése.



2. ábra

2. Megoldásunkban a 23 négytagú összegre való bontásairól volt szó, különböző természetes számokból. Ha minden szóba jöhető felbontást előállítunk, összesen 16-ot kapunk. Ezekből egy 16-csúcsú gráfot alakíthatunk ki, ha éllel kötjük össze mindazokat, amelyeknek pontosan egy közös eleme van. Megoldásunkban ennek a gráfnak a négy elemű teljes részgráfjai közül állítottunk elő néhányat, vagyis olyan felbontásnégyeseket kerestünk, amelyekre az teljesül, hogy bennük bármely kettőnek egy közös eleme van (3. ábra).



3. ábra