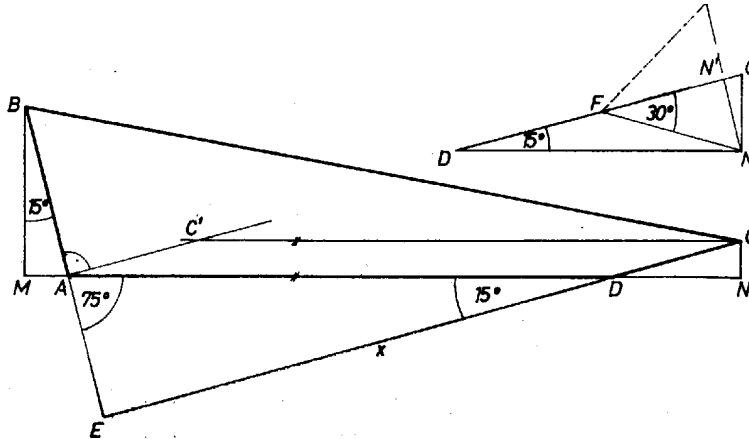


1. Vegyük észre, hogy az $ABCD$ négyszög A és D csúcsánál levő külső szögek összege $75^\circ + 15^\circ = 90^\circ$, s így az AB és CD oldalak meghosszabbításával létrejött háromszög derékszögű. Jelöljük e háromszögnek a derékszögnél fekvő csúcsát E -vel.



A szerkesztést ennek alapján a következőképpen végezhetjük el. Az AB szakaszra A végpontjában felmérjük az BAD szöget, és az A pontban a szakaszra (ugyanazon az oldalán) állított merőlegesre egy, a DC -vel egyenlő AC' hosszúságot. Az AC' -t AD szögszárral párhuzamosan eltoljuk, míg metszi a B középpontú BC sugarú kört, itt kapjuk a négyszög C csúcsát. Végül D -t a C -ből AB -re bocsátott merőleges metszi ki. C létrejön, mert a párhuzamos egyenes C' pontja a körön belül van.

2. Az $ABCD$ négyszög területét ki tudjuk számítani, ha kiegészítjük derékszögű trapézzá úgy, hogy C -ből és B -ből merőlegest állítunk az AD oldalegyenesre. Jelöljük a merőlegesek talppontját rendre N -nel és M -mel. Az $ABCD$ négyszög területét megkapjuk, ha $CNMB$ trapéz területéből kivonjuk a CND és BMA háromszögek területének összegét.

A CND háromszög CD oldalához tartozó magasságvonalát könnyen kiszámíthatjuk. Jelöljük e magasság talppontját N' -vel és a CD oldal felezőpontját F -fel. Mivel a háromszög derékszögű, $FN = FC$, $FDN \sphericalangle = DNF \sphericalangle = 15^\circ$, $N'FN \sphericalangle = 30^\circ$, így $FNN' \sphericalangle = 60^\circ$ háromszög fele egy egyenlő oldalú háromszögnek:

$$FN = 2, \quad NN' = 1, \quad N'F = \sqrt{3},$$

$$CND_{ter} = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2 \text{ cm}^2.$$

Mivel BMA háromszög $5 : 4$ arányú nagyítása a DNC háromszögnek, ezért

$$\text{területe } \left(\frac{5}{4}\right)^2 \text{-szer akkora, azaz}$$

$$BMA_{ter} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot 2 = \frac{25}{8} = 3,125 \text{ cm}^2.$$

A $CNMB$ trapéz területének kiszámításához először írjuk fel a szükséges méreteket. A CN , BM és NM hosszúságok meghatározásához a Pitagorasz tételt használjuk fel:

$$CN = \sqrt{NN'^2 + N'C^2} = \sqrt{1^2 + (2 - \sqrt{3})^2} = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

A mondott hasonlóság miatt, $DN = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ alapján

$$BM = \frac{5}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}} \text{ és}$$

$$NM = \sqrt{BC^2 - (BM - CN)^2} = \sqrt{22^2 - \left(2,5\sqrt{2 + \sqrt{3}} - 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^2}.$$

Így a trapéz területe

$$NCBM_{ter} = \frac{5}{4} \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right) NM = 63,56 \text{ cm}^2.$$

Az adatokat pontosnak tekintjük, a szükséges közelítő értékeket táblázatból kerestük ki, és így az $ABCD$ négyszög területe $58,43 \text{ cm}^2$.

Megjegyzés. A négyszög területét kiszámíthatjuk az EBC és EAD derékszögű háromszögek területének különbségként is, miután a $DE = x$ szakaszt az

$$(x + 4)^2 + (x \operatorname{tg} 15^\circ + 5)^2 = 22^2$$

egyenletből kiszámítottuk.