

$$(1) \quad \frac{2x}{|x-3|-5} + \frac{1}{x+2} \geq 1.$$

Az $|x-3|$ tag föllépése miatt két esetet kell megkülönböztetnünk.

I. Ha $x-3 \geq 0$, azaz $x \geq 3$, akkor (1) első törtje írható így is:

$$\frac{2x}{x-3-5} = 2 + \frac{16}{x-8},$$

és ezzel (1) így alakítható:

$$(2) \quad \frac{16}{x-8} \geq -1 - \frac{1}{x+2}.$$

A jobb oldal nevezőjére $x+2 \geq 5$, ezért az egész intervallumban

$$(3) \quad -1 > -1 - \frac{1}{x+2} \geq -1 - \frac{1}{5} = -1,2.$$

A bal oldal zérushelye viszont kettéválasztja az intervallumot. Ha

$$(*) \quad x > 8,$$

akkor a bal oldal pozitív, ez tehát (2) és (3) szerint megoldása az egyenlőtlenségnek. Ha ellenben $3 \leq x < 8$, akkor a bal oldal negatív, és legnagyobb értéke $x=3$ esetén $-3,2$, eszerint ebben a részintervallumban nincs megoldás.

II. Az $x < 3$ esetben (1) két tagjának a nevezője közösnek adódik:

$$(4) \quad \frac{2x}{-x+3-5} + \frac{1}{x+2} = \frac{1-2x}{x+2} \geq 1,$$

más szóval: a bal és jobb oldal különbsége nem lehet negatív:

$$\frac{1-2x}{x+2} - 1 = \frac{-1-3x}{x+2} \geq 0,$$

vagyis a számlálónak és a nevezőnek egyenlő előjelűnek kell lennie, megengedve még azt is, hogy a számláló 0 legyen.

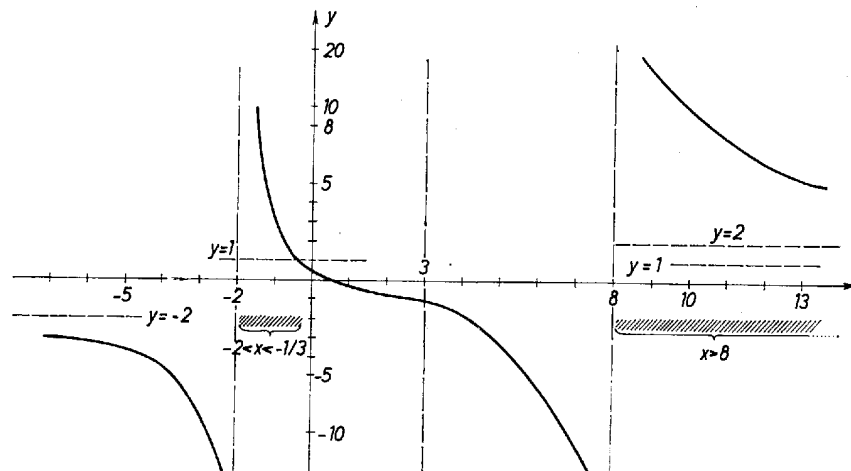
A számláló is, a nevező is a vizsgált intervallumban vált előjelet, a számláló a $-\frac{1}{3}$ helyen áthaladva pozitívból negatívra változik, a nevező a (-2) helyen áthaladva negatívból pozitívvá lesz, így (4) a köztük levő

$$(**) \quad -2 < x \leq -\frac{1}{3}$$

értékekre teljesül. Részletezve lásd e táblázaton:

ha	$x < -2$	$-2 < x \leq -\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3} < x < 3$
akkor $-1-3x$	> 0	≥ 0	< 0
$x+2$	< 0	> 0	> 0

Ezek szerint (1) megoldásai a $(*)$ és $(**)$ értékek.



Megjegyzés. (1) bal oldalának változását grafikonunk mutatja. A görbe az $x=3$ pontban folytonos, mert ott $x-3$ folytonos, de törése van.