

**I. megoldás.** Első hallásra meglepő, hogy  $n$ -ről  $(n+1)$ -re áttérve a számjegyek összegének párosnak kell maradni, vagyis páros számmal kell megváltoznia; hiszen azt tartanánk természetesnek, hogy a növelésre a jegyösszeg is 1-gyel növekedjék. Valóban, ez a gyakoribb eset – ti. ha  $n$  utolsó jegye nem 9-es –, mert így csak az utolsó jegy változik meg 1-gyel, páratlan számmal, és ezért a jegyösszeg is vagy párosról páratlanra változik vagy fordítva; itt tehát nincs keresnivalónk. Vizsgálódásra érdemes feladat azonban nemegyszer a ritkábban föllépő esetekben adódik, itt a 9-es végződésű  $n$ -eknél, amikor az  $(n+1)$  szám végén legalább két helyen lép föl új jegy.

Jelöljük az  $n$  szám végén álló 9-esek számát  $k$ -val, vagyis a jobbról  $(k+1)$ -edik jegy már nem 9-es.  $(n+1)$ -re áttérve ennek a jegynek a helyére 1-gyel nagyobb lép, utána pedig  $k$  db 0 következik – azaz 9-cel kisebbek –, tehát a jegyösszeg változása  $(1-9k)$ . Ez nyilvánvalóan akkor és csak akkor páros, ha  $k$  páratlan. – Eszerint a legkisebb megfelelő  $n$ ,  $(n+1)$  számpár 1 db 9-essel a 19 és a 20, 3 db 9-essel az 1999, 2000.

Mivel  $n < 10^6$ , azaz legfőljebb 6 jegye van, azért  $k$ -ra feladatunkban  $k \leq 5$ -nek is teljesülnie kell.

I. Ha  $k = 5$ , akkor  $n = A99999$  alakú, ahol  $A = 1, 3, 5$  vagy 7, hiszen a jegyek  $A + 5 \cdot 9$  összege csak páratlan  $A$  mellett lesz páros, másrészt  $A \neq 9$ ; az ilyen  $n$ -ek száma tehát 4.

II. Ha  $k = 3$ , akkor  $n = ABC999$  alakú, ahol  $A+B+C$  páratlan és  $C \neq 9$ . Az utóbbi föltétel miatt  $C$  a 0, 1, ..., 8 jegyek valamelyike, azaz 9-féleképpen választható, a  $B$  10-féleképpen, végül az ezekkel már meghatározott  $(B+C)$ -t az  $A$  jegy 5-féleképpen teheti páratlanná: páratlan  $(B+C)$  esetén rendre a 0, 2, 4, 6, 8 jegyekkel, páros  $(B+C)$  esetén az 5 páratlan jeggyel. Ebbe a csoportba tehát  $5 \cdot 10 \cdot 9 = 450$  db megfelelő  $n$  tartozik.

III. Végül  $k = 1$  esetén hasonlóan  $n = ABCDE9$ , ahol  $E < 9$  és  $(A+B+C+D+E)$  páratlan; a II. eset gondolatmenetét megismételve ide  $5 \cdot 10^3 \cdot 9 = 45\,000$  db megfelelő  $n$  tartozik.

Mindezek alapján a feladat kérdésére a válasz:  $45\,000 + 450 + 4 = 45\,454$  db a  $10^6$ -nál kisebb, páros jegyösszegű olyan  $n$  természetes szám van, hogy  $(n+1)$  számjegyeinek összege is páros.

**II. megoldás.** Ha már tudjuk, hogy  $n$  csak akkor lehet megfelelő, ha a végén páratlan számú 9-es előtt egy, a 9-esről különböző számjegy áll, akkor a megfelelők számának megállapítását így is végezhetjük, mindjárt tetszőleges  $j$  mellett a  $10^j$  korlátig.

Ha  $j$  páratlan, akkor  $n$  végén számunkra maximálisan  $(j-2)$  db 9-es jön szóba, hiszen a  $j$  db 9-essel írt szám elé már nem jöhet egy, a páratlan  $9j$  összeget párossá tevő jegy; ha pedig  $j$  páros, akkor a  $(j-1)$  db 9-es végű számok még szóba jönnek. Az olyan természetes számok létszáma, amelyek kisebbek, mint  $10^j$  és amelyekben az utolsó  $s$  helyen 9-es áll – tekintet nélkül arra, hogy milyen jegy áll közvetlenül előttük –, nyilvánvalóan  $N_s = 10^{j-s}$ , hiszen az utolsó  $s$  hely előtti  $(j-s)$  számú helyen az összes olyan szám sorban föllép, mely  $(j-s)$  jeggyel leírható, megengedve azt is, hogy mind a  $(j-s)$  helyen zérus álljon. Így az olyan számaink száma, amelyeknek a végén pontosan  $s$  db 9-es áll:  $N_s - N_{s+1} = 10^{j-s} - 10^{j-s-1} = 9 \cdot 10^{j-s-1}$ .

Megmutatjuk, hogy e számok közül ugyanannyiban páros a számjegyek összege, mint amennyiben páratlan – hacsak még  $N_{s+1}$  is páros szám, azaz  $j-s-1 \geq 1$ , másképpen  $s \leq j-2$ ; pontosabban azt, hogy ez az állítás a  $(j-s)$ -jegyű és a  $(j-s-1)$ -jegyű számokra külön-külön igaz, igaz tehát az  $N_{s+1}$  számú szám elhagyásával előálló halmazra is. Ugyanis  $j-s-1 \geq 1$  miatt még a  $(j-s-1)$  jegyű számok is a 0-tól kezdve egyesével növekedően tíztagú csoportokba foghatók össze, minden egyes csoport tíz száma csak az utolsó jegyben különbözik egymástól, és az utolsó jegyek közül 5–5 páratlanná, illetve párossá teszi az előttük álló közös számjegyeik összegét. És ez az egyenlőség akkor is megmarad, ha mögéjük csupa 9-eseket írunk. Eszerint a pontosan  $s$  db 9-esre végződő,  $j(\geq s+2)$  jegyű, páros jegyösszegű számok száma

$$(*) \quad \frac{N_s}{2} - \frac{N_{s+1}}{2} = 5 \cdot 10^{j-s-1} - 5 \cdot 10^{j-s-2} = 45 \cdot 10^{j-s-2},$$

ha

$$j-s-2 \geq 0, \quad \text{azaz} \quad s \leq j-2.$$

Mi ezt a páratlan  $s$ -ekre (az I. megoldásbeli  $k$  értékekre) tekintjük, így 10 kitevői  $s = 1, 3, 5, \dots$  mellett:  $j-3, j-5, j-7, \dots$  lesznek, és a 2-esével való csökkenésre tekintettel a  $(*)$  számok összege a  $454545 \dots$  alakú lesz. Ha  $j$  páratlan, akkor  $s = j-2$  esetére  $(*)$   $45 \cdot 10^0$ -t ad, vagyis 45-öt, tehát az összeg végén is 45 áll, jegyeinek száma  $(j-1)$ , a „45” számjegypároké  $\frac{j-1}{2}$ .

Ha pedig  $j$  páros – mint eredeti feladatunkban  $j = 6$  –, akkor fenti felezési megfontolásunk  $s = j-1$ -re még helyes, de  $N_{s+1}$  már nem felezhető, ez az érték 1, az  $(s+1) = j$  db 9-essel végződő számok száma. A  $j$  db 9-essel írt  $n$  szám még kisebb  $10^j$ -nél és jegyösszege  $9j$  is páros szám, mégsem felel meg, mert ekkor  $n+1 = 10j$ , és jegyeinek összege 1, nem páros. Eszerint  $s = j-1$  mellett  $(*)$  helyett  $5-1 = 4$ -et kapunk, tehát a feladatnak megfelelő  $n$ -ek számát a  $(j-1)$  db számjeggyel írt  $4545 \dots 4$  szám adja meg.

Összefoglalva: a  $10^j$  határig megfelelő  $n$ -ek száma a következő  $(j-1)$  jegyű szám:  $4545 \dots$