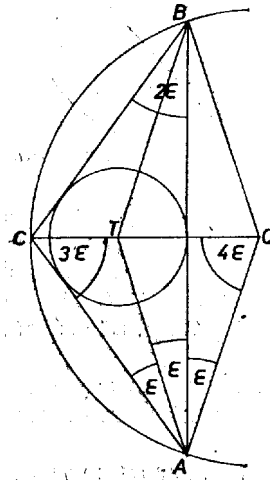


A H köré írt kör középpontját mindhárom esetben O -val jelölve, $OA = OB$, és a tükrözés alapján az $AOBT$ négyszög rombusz. Ez egyik esetben sem elfajult, mert az I. és a III. esetben T határozottan belső pontja H -nak, a II. esetben pedig határozottan külső pontja. Eszerint O az I.-ben és a III.-ban külső pont, a II.-ban belső pont.

Továbbá mindig fennáll $OAB\angle = TAB\angle = TBA\angle = OBA\angle$, jelöljük ezt ε -nal.

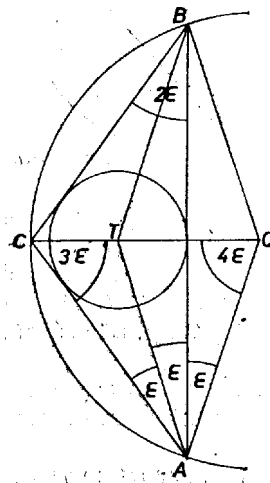
Az I. esetben a beírt kör középpontjának tulajdonságai szerint TA felezi a BAC szöget, TB az ABC szöget, így H -ban A -nál és B -nél 2ε nagyságú szög van (1. ábra).



1. ábra

$CBA\angle = 2\varepsilon$ -ből a kerületi és középponti szögek tétele alapján $COA\angle = 4\varepsilon$. Továbbá $CAO\angle = 3\varepsilon$, és mivel az ACO háromszög egyenlő szárú, ezért szögeinek összege alapján $3\varepsilon + 3\varepsilon + 4\varepsilon = 180^\circ$, $\varepsilon = 18^\circ$. Így H szögei: 36° , 36° , 108° .

A II. esetben a hozzáírt kör középpontjának tulajdonságai szerint TA , TB a BAC , illetve ABC szög mellékszögét felezi, e két szög nagysága 2ε , ezért H -ban A -nál és B -nél egymással egyenlő, $180^\circ - 2\varepsilon$ nagyságú szög van, a C -nél levő szög pedig $180^\circ - 2(180^\circ - 2\varepsilon) = 4\varepsilon - 180^\circ$ (2. ábra).



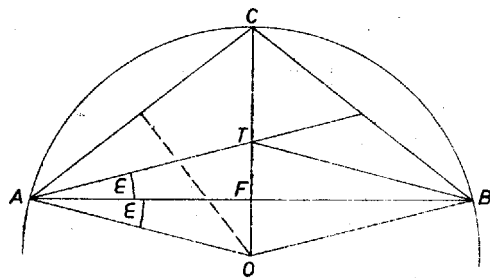
1. ábra

Ezek alapján: az ACO háromszögben C -nél és A -nál

$$2\varepsilon - 90^\circ, \quad \text{illetve} \quad (180^\circ - 2\varepsilon) - \varepsilon$$

nagyságú szög van (az utóbbinál használtuk fel fenti megállapításunkat, hogy O a BAC szögtartomány belsejében van), ezek egyenlőségéből $\varepsilon = 54^\circ$, így pedig H szögei: 72° , 72° , 36° .

Végül a III. esetben a súlypont tulajdonságai szerint C rajta van az AB oldal F felezőpontját T -vel összekötő egyenesen és $FC = 3 \cdot FT$ (3. ábra).



3. ábra

$AO = BO$ alapján az AB -re merőleges TO egyenes is átmegy F -en, tehát C -n is, a H egyenlő szárú, továbbá $FT = FO$, és

$$CO = CF + FO = 4FO.$$

Ebből

$$\sin \varepsilon = \frac{FO}{AO} = \frac{FO}{CO} = \frac{1}{4}, \quad \varepsilon = 14^\circ 29',$$

(felkerekítve), folytatólag $AOC \sphericalangle = 90^\circ - \varepsilon = 75^\circ 31'$,

$$ACB \sphericalangle = 2 \cdot ACO \sphericalangle = 2 \left(90^\circ - \frac{AOC \sphericalangle}{2} \right) = 104^\circ 29',$$

$$BAC \sphericalangle = ABC \sphericalangle = 37^\circ 46'.$$

Trigonometriai ismeretek nélkül a fenti elemzés alapján a körülírt kör OC sugarára az F negyedelő pontjában állított merőlegessel metsszük ki A és B helyzetét, és megmérjük a kapott H szögeit.