

$$(1) \quad K = \frac{(\sqrt{r+1} - \sqrt{r-1})^n - (\sqrt{r+1} + \sqrt{r-1})^n}{(\sqrt{r+1} - \sqrt{r-1})^n + (\sqrt{r+1} + \sqrt{r-1})^n},$$

Az r szám adott kifejezését behelyettesítve

$$\begin{aligned} \sqrt{r+1} &= \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2xy} + 1} = \sqrt{\frac{(x+y)^2}{2xy}} = \frac{x+y}{\sqrt{2xy}}, \\ \sqrt{r-1} &= \sqrt{\frac{(x+y)^2}{2xy}} = \frac{|x-y|}{\sqrt{2xy}} = \frac{x-y}{\sqrt{2xy}}, \text{ ha } x > y (> 0). \end{aligned}$$

Mivel r kifejezése szimmetrikus x -ben és y -ban, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $x > y$; ezzel fejeztük ki, hogy $\sqrt{r-1} \geq 0$.

Ezeket (1)-be beírva, K számlálójában és nevezőjében

$$\sqrt{r+1} - \sqrt{r-1} = \frac{2y}{\sqrt{2xy}}, \quad \sqrt{r+1} + \sqrt{r-1} = \frac{2x}{\sqrt{2xy}},$$

és $\left(\frac{\sqrt{2xy}}{2}\right)^n$ -nel bővítve

$$K = \frac{y^n - x^n}{y^n + x^n} (< 0).$$

Ez az előírt n -eken túlmenően minden n természetes számra érvényes.

Az utolsó alakban a nevezőbeli és a számlálóbeli polinomnak nincs közös polinom-tényezője, ezért további egyszerűsítés nem lehetséges. Ha ugyanis volna közös tényezőjük, ez az összegüknek, $2y^n$ -nek is, és a $2x^n$ különbségüknek is tényezője volna, márpedig látjuk, hogy ilyen nincs.

Megjegyzés. Nem használtuk ki x -ről és y -ról a teljes feltevést, csak azt, hogy 0-tól különbözők és hogy előjelük egyenlő.