

1. Számoljuk össze, hogy mennyi a Béla részére kedvező rendszámok száma. Ebben figyelmen kívül hagyjuk a 0000 „négyjegyű” számot.

Először a $K > 0$ esettel foglalkozunk. A feltételben szereplő kikötést, hogy ti. $N/K = E$ egész szám legyen, átfogalmazhatjuk a következőképpen: E -nek és K -nak egymástól függetlenül pozitív egész értékeket kell adnunk úgy, hogy $K \cdot E = N < 100$ legyen ($K, E > 0$) és össze kell számolnunk a lehetséges ilyen értékpárok számát. Ha K értéke 1, akkor 1-nek 100-nál kisebb pozitív egész számú többszöröseit, ha $K = 2$, akkor 2-nek 100-nál kisebb pozitív egész számú többszöröseit kell összeszámolnunk és így tovább. Az ilyen többszörösök számát $K = 2$ -re megadja a $\frac{99}{2}$

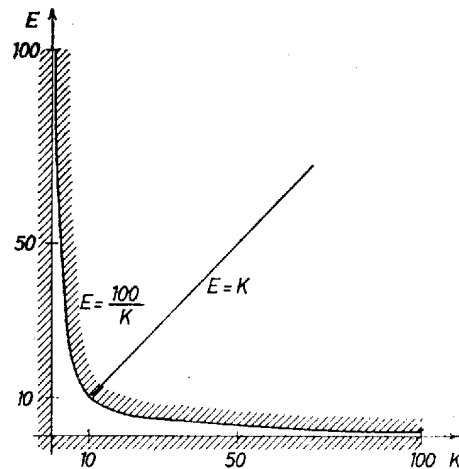
hányados egész része, amit így szokás jelölni: $\left[\frac{99}{2} \right]$. Általában $[x]$ (olv. x egész része, vagy elterjedt francia kifejezéssel: ¹ antyié x) az x -nél nem nagyobb egész számok legnagyobbikát jelöli, vagyis $x - 1 < [x] \leq x$.

Eszerint, végigmenve a $K = 1, 2, \dots, 99$ értékeken, a következő összeg értékét kell meghatároznunk:

$$(1) \quad \left[\frac{99}{1} \right] + \left[\frac{99}{2} \right] + \dots + \left[\frac{99}{99} \right].$$

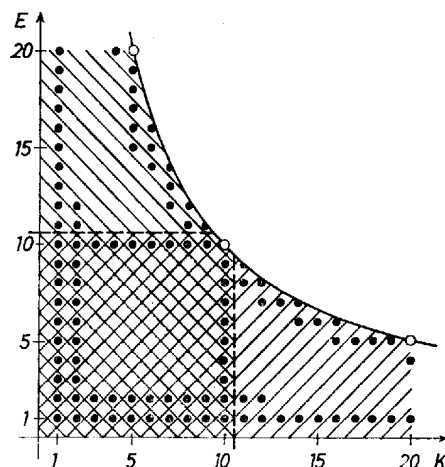
Egy kis ügyeskedéssel egyszerűbbé tehetjük a számolást.

A $KE < 100$ összefüggést ábrázoljuk a K, E koordináta-rendszerben. Az összetartozó K és E egész számpárokat ($K, E > 0$) a berajzolt $E = \frac{100}{K}$ hiperbolaív és a megvastagított koordinátatengely-szakaszok által határolt terület belsejébe eső egész koordinátájú ún. rácspontok ábrázolják (1. ábra).



1. ábra

A szorzás kommutatív törvénye alapján a hiperbolaív szimmetrikus az $E = K$ egyenesre, emiatt a $K \leq 10$ -hez tartozó rácspontok száma megegyezik az $E \leq 10$ -hez tartozó rácspontok számával, és ezért a 99-tagú összeg helyett elegendő a $\left[\frac{99}{1} \right]$ -től $\left[\frac{99}{10} \right]$ -ig terjedő tagok összegét kiszámítani (a 2. ábra jobbra lejtősen vonalkázott idomának belső rácspontjai).



¹Rámutatunk, hogy az „antyié x ” olvasás ugyanolyan hiányos fordítású – mert a gyakorlat által lekoptatott –, mint a „sinus x ”, a „logaritmus x ” és társaik. Valamivel jobb lenne így: „antyiéja az x -nek”, „logaritmusa az x -nek”, de még ez is csak efféle tört magyarságnak felelne meg: ceruzája a Jóskának. Miközben utánozzuk az idegen birtokviszony-szerkezetet – a rövidítésből csak a betűt olvassuk –, megértési nehézséget teremtünk azoknak a fiatal magyaroknak, akik számára még új a kifejezés. Persze annak nincs ilyen nehézsége, aki már megszokta az efféle rövidítések *idegen szellemét* és a rövidített kiejtés *jelentését* is. – Szerk.

2. ábra

Ha azonban ennek az összegnek a kétszeresét vennénk az E , K felcserélésének megfelelő tükrözésre gondolva (jobbra emelkedő vonalkázás), akkor lenne egy olyan rész, amelyben szereplő rácpontokat kétszer vennénk számításba. Ez a rész (majdnem) négyzet, a benne levő rácpontok száma $10 \cdot 10 - 1 = 99$, ugyanis a $(10; 10)$ rácpont nem számítandó, hiszen rajta van a hiperbolán. A számítás:

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{99}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{99}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{99}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{99}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{99}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{99}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{99}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{99}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{99}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{99}{10} \right\rfloor = \\ = 99 + 49 + 33 + 24 + 19 + 16 + 14 + 12 + 11 + 9 = 286. \end{aligned}$$

Tehát az idomban levő rácpontok száma $2 \cdot 286 - 99 = 473$. Ennyi olyan K , N pár van, melyre $01 \leq K \leq N = KE \leq 99$, és E egész szám.

Rátérve az autórendszámra, K egyaránt lehet annak jobb vagy bal oldali szelete. Ha azonban ezen a címen megkészszerelnénk az előbb talált számot, kis hibát vétenénk, ugyanis K és N felcserélése az $N/K = E = 1$, azaz $N = K$ esetben nem ad új rendszámot. Ilyen eset 99 van, ezért $K > 0$ mellett a Bélára kedvező rendszámok száma $2 \cdot 473 - 99 = 847$.

Térjünk rá a – Béla számára kedvező – másik esetre, amikor $K = 0$ (azaz 00) és ez a rendszám bal oldali szelete. Ekkor N lehetőségeinek száma 99. Ugyanennyi kedvező eset van, amelyben K hátul áll, együtt 198.

Vagyis mindkét feltételt figyelembe véve, Béla számára a kedvező rendszámok száma 1045.

2. És mivel az összes négy jegyű számok száma 9999, ezért Andrásnak 8954 nyerőszáma van.

3. Ezek alapján akkor lehet a feladat kérdését eldönteni, azaz hogy a játék melyik fiú számára előnyös, ha minden rendszám egyenlő eséllyel fordul elő. Ez bekövetkezhet úgy, hogy mindegyik rendszámmal ugyanannyiszor találkoznak, pl. egyszer. Ekkor Béla nyereménye 1045 Ft, míg Andrásé $8954 \cdot 0,1 = 895,40$ Ft, vagyis nyilván ő jár rosszabbul.