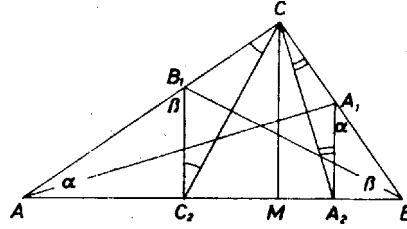


I. megoldás. Messe a $BAC \sphericalangle = \alpha$, ill. $ABC \sphericalangle = \beta$ szög szögfelezője a szemközti oldalt A_1 -ben, ill. B_1 -ben, és jelöljük ezeknek az AB -re eső vetületét A_2 -vel, ill. B_2 -vel.



Az A_1, B_1 pontnak a felezett szög másik szárára való vetülete C , ezért $A_1C = A_1A_2$, (hiszen a szögfelező pontjai ugyanakkora távolságra vannak a szög két szárától), tehát az A_1CA_2 háromszög egyenlő szárú. Így $A_1CA_2 \sphericalangle = \alpha/2$, hiszen $BA_1A_2 \sphericalangle = \alpha$. Hasonlóképpen $B_1CB_2 \sphericalangle = \beta/2$, és így

$$A_2CB_2 \sphericalangle = 90^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) = 45^\circ,$$

tehát az A_2B_2 szakasz valóban 45° szögben látszik a C -ből.

Felhasználtuk azt is, hogy A_2 és B_2 az AB szakasz belső pontjai. Ez szemlélet nélkül is adódik abból, hogy A_1, B_1 , a befogókon vannak, a befogók vetülete pedig része az átfogónak, mert α és β hegyesszög.

Megjegyzés. A felhasznált szögegyenlőségek abból is kiolvashatók, hogy az A, A_2, A_1 és C pontok egy körön, az AA_1 szakasz Thalész-körén fekszenek. Így a kerületi szögek tételéből következik, hogy pl. $A_1CA_2 \sphericalangle = A_1AA_2 \sphericalangle = \alpha/2$.

II. megoldás. Legyen az AB -hez tartozó magasság talppontja M . A párhuzamos szelők tétele, a szögfelező tétel és az ABC, ACM háromszögek hasonlósága alapján

$$\frac{AB_2}{B_2M} = \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AB}{CB} = \frac{AC}{MC}.$$

Így a szögfelező tétel megfordításából következik, hogy CB_2 felezi az ACM szöget. Hasonlóan CA_2 felezi az MCB szöget s így

$$B_2CA_2 \sphericalangle = 1/2 ACB \sphericalangle = 45^\circ.$$