

Ha $a = 0$, akkor vagy $x = 0$ és y tetszőleges szám, vagy $y = 0$ és x tetszőleges. Mindkét esetben csak akkor van megoldása a rendszernek, ha b is 0, és ekkor végtelen sok megoldás van. Hasonlóan $b = 0$, $a \neq 0$ esetében sincs határozott megoldás. A továbbiakban feltesszük, hogy a , b egyike sem 0, ekkor sem x , sem y nem lehet 0.

x -et kiküszöbölhetnénk, ha kitevője a két egyenletben egyenlő volna. Ezt viszont elérhetjük, ha egyenleteinket hatványozzuk, hiszen így x kitevője (1) egymás utáni hatványaiban 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... lenne, (2) hatványaiban 5, 10, 15, ..., és c két sorozatnak *van* közös eleme, a 10.

A (1) egyenletet négyzetre, a (2)-t ötödik hatványra emelve

$$\begin{aligned}x^{10}y^{34} &= a^2 \\ x^{10}y^{35} &= b^5,\end{aligned}$$

és az utóbbit az előbbivel elosztva

$$(3) \quad y = \frac{b^5}{a^2}$$

x meghatározása céljára hasonlóan (1)-et a 7., (2)-t a 17. hatványra emelve, majd osztva

$$(4) \quad \frac{a^7}{b^{17}} = \frac{x^{35}y^{119}}{x^{34}y^{119}} = x.$$

Visszahelyettesítve (3)-at és (4)-et (1)-be és (2)-be, látjuk, hogy megkaptuk a megoldást.

Megjegyzések. 1. Matematikai szempontból szebb lett volna x -et úgy számítani, hogy (3)-at (1) és (2) valamelyikébe helyettesítve képezzünk x -re egyismeretlenes egyenletet. Ha (2)-be írjuk be:

$$x^2 = b \left(\frac{1}{y} \right)^7 = \frac{a^{14}}{b^{34}}, \quad x = \pm \frac{a^7}{b^{17}},$$

és az ellenőrző behelyettesítés adja, hogy csak a felső előjel felel meg.

Ha már szóba jöttek előjelek, jó lesz kimondani, hogy (3) és (4) az a és b előjelére való bármilyen korlátozás nélkül érvényes (csak 0 nem lehet egyikük sem). (3) szerint y ugyanolyan előjelű, mint b – ez már a (2)-ből is könnyen látható –, (4) szerint pedig x akkor és csak akkor pozitív, ha a és b egyező előjelűek, viszont negatív, ha ellentétes előjelűek. (Az utóbbi (1)-ből is kimondható: $x > 0$, ha a és y egyező jelűek.)

2. Többen rámutattak, hogy ugyanezzel a gondolatmenettel oldható meg az

$$x^c y^d = a, \quad x^e y^f = b$$

egyenletrendszer, ahol $a \neq 0$, $b \neq 0$, és c , d , e , f olyan természetes számok, amelyekre $|cf - de| = 1$. Ez helyes, de általában való kimondása így mégsem célszerű, inkább mindjárt tetszőleges $cf - de = g \neq 0$ esetére a következő alakban:

$$|x| = \sqrt[g]{\left| \frac{a^f}{b^d} \right|} \quad |y| = \sqrt[g]{\left| \frac{b^c}{a^e} \right|},$$

és – páros g esetén – az előjelek külön állapítandók meg.

3. Akik már megismerkedtek a logaritmus fogalmával és azonosságával, azok ennek felhasználásával is megoldhatják az egyenletrendszert. Logaritmálva az (1) és (2) egyenletet, az

$$\begin{aligned}5 \lg x + 17 \lg y &= \lg a \\ 2 \lg x + 7 \lg y &= \lg b\end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk, ami $\lg x$ -re és $\lg y$ -ra elsőfokú egyenletrendszer. Most azonban fel kell tennünk, hogy a és b mindegyike pozitív szám, amiből következik, hogy x és y is pozitív.

(Ha a és b közt negatív is van, akkor a és b abszolút értékéből x és y abszolút értékét számíthatjuk ki, előjelüket pedig a fentebbi megfontolással állapíthatjuk meg.)