

Azt használjuk fel, hogy az adatként és a kérdésben szereplő pozitív egész számok törzstényezői felbontásában csak 3-féle törzsszám lép föl: 2, 5 és 11, ugyanis $55 = 5 \cdot 11$, $50 = 2 \cdot 5^2$, $20 = 2^2 \cdot 5$, $2662 = 2 \cdot 11^3$, $10 = 2 \cdot 5$ és $250 = 2 \cdot 5^3$. E három törzsszám logaritmusainak aránya – ami bármely (1-től különböző, pozitív) alapra vonatkozóan ugyanaz – az adott két logaritmusból kiszámítható. – Jelöljük az adatokat rendre a -val, b -vel, így 10-alapú logaritmusokkal kifejezve

$$\log_{50} 55 = a = \frac{\lg 55}{\lg 50} = \frac{\lg 5 + \lg 11}{\lg 2 + 2 \lg 5}, \quad \log_{55} 20 = b = \frac{\lg 20}{\lg 55} = \frac{2 \lg 2 + \lg 5}{\lg 5 + \lg 11}.$$

Innen kellő rendezéssel

$$\begin{aligned} a \frac{\lg 2}{\lg 11} + (2a - 1) \frac{\lg 5}{\lg 11} &= 1, \\ 2 \frac{\lg 2}{\lg 11} + (1 - b) \frac{\lg 5}{\lg 11} &= b, \\ \frac{\lg 2}{\lg 11} &= \frac{2ab - 1}{3a + ab - 2}, \quad \frac{\lg 5}{\lg 11} = \frac{2 - ab}{3a + ab - 2}, \end{aligned}$$

valgyis van olyan k arányossági tényező, hogy

$$\lg 2 = k(2ab - 1), \quad \lg 5 = k(2 - ab), \quad \lg 11 = k(3a + ab - 2).$$

Mármost ezeket felhasználva k kiesik:

$$\begin{aligned} x = \log_{250} 2662\sqrt{10} &= \frac{\lg 2662 + \frac{1}{2} \lg 10}{\lg 250} = \frac{\frac{3}{2} \lg 2 + 3 \lg 11 + \frac{1}{2} \lg 5}{\lg 2 + 3 \lg 5} = \\ &= \frac{3(2ab - 1) + 6(3a + ab - 2) + (2 - ab)}{2(2ab - 1) + 6(2 - ab)} = \frac{18a + 11ab - 13}{10 - 2ab}, \end{aligned}$$

és ezzel a számítást befejeztük. A fölhasznált nevezők egyike sem 0, ugyanis $a > 1$, mert $55 > 50 > 1$, b a 0 és 1 közé esik, mert $1 < 20 < 55$, és $ab = (\lg 20) : (\lg 50)$, így $0 < ab < 1$, ennél fogva $3a + ab - 2 > 1$, és $10 - 2ab > 8$.

Éltető László (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., I. o. t.)

Megjegyzés. Az a , ab , x számok tízes számrendszerbeli kiszámításának nem volna értelme, hiszen a és ab csak logaritmustáblázat alapján volna számítható, tehát x is csak úgy. Márpedig táblázat birtokában $2662\sqrt{10}$ és 250 tízes alapú logaritmusai direkt is kiírható és hányadosuk rövidebben megadná x -et. Legfőképpen pedig azért nem volna értelme, mert nem az volt a feladat.