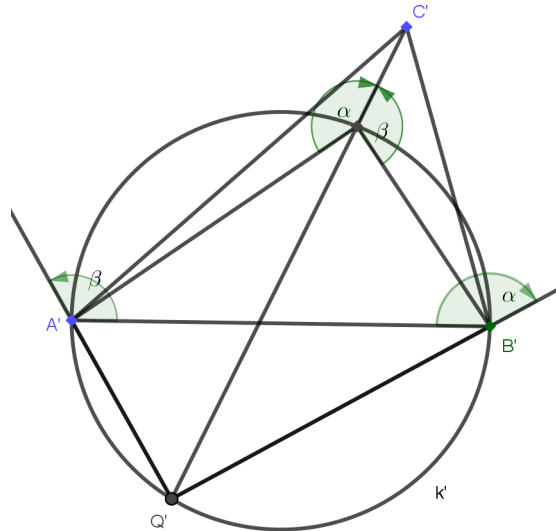


1. Az A, B, C alappontok egyenrangúak, mégha a látószögek megadásában a PC félegyenes kétszer szerepel is PA és PB egyszeri szereplésével szemben. Ugyanis a terepen ott állva, látjuk P helyzetét az ABC háromszöghöz viszonyítva, és α és β kapcsolatát az AB oldal 180° -nál nem nagyobb $APB \angle = \gamma$ látószögével. A háromszög belsejében és az oldalszakaszain levő pontokban e 3 látószög összege 360° . (P -t az A, B, C pontoktól természetesen különbözőnek tekintjük.) Ha pedig P kívül van a háromszögon, akkor valamelyik két látószög összege egyenlő a harmadikkal, akár a háromszög valamelyik szögének a csúcstartományában fekszik P , akár valamelyik oldalszakasszal szomszédos ún. serpenyőtartományokban. Ezekben a helyzetekben tehát választhatjuk úgy az alappontok és a megfelelő látószögek betűzését, hogy $\alpha + \beta = \gamma$ legyen; más szóval: hogy C benne legyen a 180° -nál kisebb APB szögtartományban. Továbbá mindegyik ábránkon úgy választottuk a betűzést, hogy a PA félegyenes negatív, PB -t pedig pozitív irányú és α , ill. β Abszolút értékű elfordítás vigye át a PC félegyenesbe.

Bizonyításunkat 3 részben végezzük az AB, BC, CA egyenesekkel felosztott sík említett 3-féle tartománya szerint.

2. Legyen először P az ABC háromszög belsejében, ekkor $180^\circ < \alpha + \beta < 360^\circ$, és természetesen P' az $A'B'C'$ háromszögben lesz (1. ábra).



1. ábra

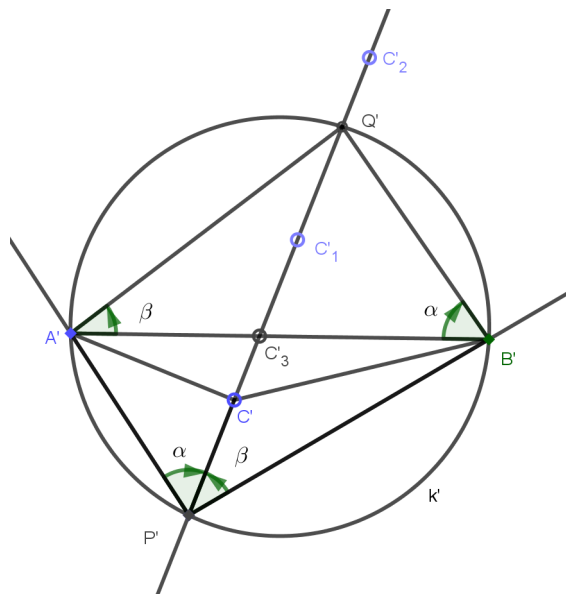
Amikor az $A'B'$ félegyenes A' körül és a $B'A'$ félegyenes B' körül elfordítjuk, a $-180^\circ < -\alpha < 0^\circ$ illetve $0^\circ < \beta < 180^\circ$ szöggel, ezek az $A'B'$ egyenesnek azon a partján haladnak, amelyikben C' van (és P' lesz), és eközben túlfordulnak azon a helyzeten, amelyben párhuzamosak egymással. Így a kívánt Q' metszéspontot a visszafelé való meghosszabbításaik határozzák meg, vagyis Q' az $A'B'$ egyenesnek C' -t nem tartalmazó partján adódik. Az $A'B'Q'$ háromszög első két csúcsánál rendre $180^\circ - \beta$, $180^\circ - \alpha$ nagyságú szög van, így Q' -nél:

$$B'Q'A' \angle = 180^\circ - (360^\circ - \beta - \alpha) = \alpha + \beta - 180^\circ = (360^\circ - \gamma) - 180^\circ = 180^\circ - \gamma = 180^\circ - A'P'B' \angle.$$

Ezek szerint az $A'Q'B'P'$ négyszög konvex húrnégyszög, P' valóban rajta van az A', B', Q' pontokkal meghatározott k' körön, ami az állítás első része.

Továbbá $Q'P'B' \angle = Q'A'B' \angle = 180^\circ - \beta$, ami kiegészítő szöge a mért $B'P'C' \angle = \beta$ -nak, tehát a $Q'C'$ egyenes valóban átmegy P' -n, és ez az állítás második része.

3. Ha P a C -nél levő csúcsszögtartományban van, akkor P' és C' ismét az $A'B'$ egyenesnek ugyanazon a partján vannak, másrészt $0^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ$ (2. ábra).



2. ábra

Emiatt az elforduló félegyenesek $A'B'$ -nek C' -t nem tartalmazó partján haladnak, és Q' is a túlsó parton keletkezik:

$$A'Q'B' \triangleleft = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - A'P'B' \triangleleft,$$

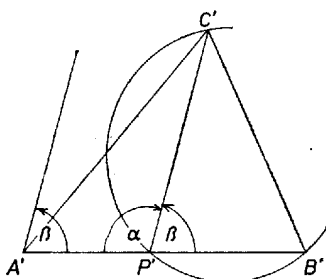
P' ismét az $A'B'Q' = k'$ körön van, másrészt $Q'P'B' \triangleleft = Q'A'B' \triangleleft = \beta$, tehát P -ből Q -t a C mögött látjuk. Az állítás ekkor is helyes.

4. Utóbbi felvételünkből C -nek a PC félegyenesen való kellő távolításával kiadódik az a helyzettípus, hogy P az AB oldallal szomszédos serpenyőtartományban van (2. ábra, C'_1 és C'_2), meggondolásunk erre a helyzetre is bizonyítja az állítást. Úgyszintén arra a helyzetre is, amelyben a 3 alappont egy egyenesen van; ekkor betűzési megállapodásunk szerint C'_3 az $A'B'$ szakasz belső pontja.

5. Mindegyik áttekintett helyzetben a Q' pont és az $A'B'Q'$ kör egyértelműen létrejön, és ez áll az első két helyzetben a $Q'C'$ egyenesre is, mert meghatározó pontjai $A'B'$ -nek két különböző partján vannak. A legutóbbi helyzetben is csak abban a kivételes esetben válik határozatlanná a $Q'C'$ egyenes, ha Q' éppen azonosnak adódik C' -vel. Ekkor P' az $A'B'Q' \equiv A'B'C'$ háromszög körülírt körén van, és természetesen a terepen P az ABC háromszög k_0 körülírt körén. Ezt a k_0 kört a geodéziai gyakorlatban röviden *veszélyes* körnek nevezik, ami pontosabban ezt jelenti: bármely A , B , C ponthármas használhatatlan a köréje írt körön levő pontok helyzetének meghatározására szerkesztésünk, vagyis a hátrametszés vizsgált módosítása mellett. Ha A' , B' , C egy egyenesen vannak, akkor maga ez az egyenes veszi át a veszélyes kör szerepét – ez C -nek az AB egyeneshez való fokozatos közelítésével látható –, ennek pontjaira α és β értéke 0° vagy az egyiké 180° , és ebből sem határozható meg P' helyzete. (Gyakorlatilag a veszélyes körhöz a serpenyőtartományokban közel fekvő pontok meghatározása is pontatlan, mert Q' közel adódik C' -höz.)

Eredményünkből tüstént látjuk, hogy a veszélyes kör pontjai az eredeti szerkesztéssel sem határozhatók meg, hiszen minden ilyen pontra az $A'C'$ -hez tartozó α nyílású és a $B'C'$ -hez tartozó β nyílású látóörívek középpontjai egybeesnek, a két körívnek $A'B'$ részíve közös. És fordítva: ha P nincs rajta a veszélyes körön, akkor a két ív középpontja különböző és C' -től különböző közös pontjuk meghatározza P' -t.

6. Eddig figyelmen kívül hagytunk két speciális helyzetet: ha $\alpha + \beta = 180^\circ$, és azt is, ha α és β egyike 0° ; pl. $\alpha = 0^\circ$ azt jelenti, hogy P az AC oldal valamelyik meghosszabbításán van. Eszerint $\alpha + \beta = 180^\circ$ mellett α és β egyike sem 0 , ekkor pedig P az AB szakaszon van. Így mindkét esetben az eredeti szerkesztésből elég használni a β nyílású körívet. (Reális felvételen természetesen $\beta > B'A'C' \triangleleft$, 3. ábra, illetve $\beta < B'A'C' \triangleleft$, 4. ábra.) – A bizonyított eljárásban a 3. ábrán Q' eleve nem jöhet létre, viszont $C'P'$ párhuzamos az $A'B'$ -nek A' körül β szöggel elfordított állásával; a 4. ábra helyzetében Q' azonosnak adódik A' -vel, a segédkör határozatlan, a szabály – csak a betűt nézve – nem használható. (Ha viszont határátmenettel az A' körül β szöggel elfordított egyenest érintő és B' -n átmenő kört vesszük segédkörnek, az eljárás érvényes marad.)



3. ábra



7. Könnyű mindezek után belátni, hogy az alappontok és a látószögek tetszőleges betűzése esetén is érvényes a szerkesztő eljárás és a mértani hely megállapítása.

Megjegyzés. Az eljárás lényege az, hogy az alapelvben 2 körrel végzett szerkesztés helyett célhoz érünk csupán 1 körrel; igaz viszont, hogy 3 egyenest kell rajzolniunk. Ez mégis könnyebb. – A vizsgált eljárást a geodéziában *Colin*-féle szerkesztésnek nevezzük.